ভূমিকা

কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের পাঠ্য-তালিকা ও জ্যামিতির পরিভাষা অনুসারে এই পুস্তকখানি লিখিত হইয়াছে। প্রতিজ্ঞা প্রমাণে সাধারণ স্বতঃসিদ্ধগুলি ব্যতীত অন্য কিছুই মানিয়া লওয়া হয় নাই, এবং পাঠ্য বিষয়গুলি সহজ যুক্তি দ্বারা ও যতদূর সম্ভব সরল ভাষায় বুঝাইবার চেষ্টা করা হইয়াছে। জ্যামিতিক সত্যগুলি সম্বন্ধে যাহাতে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর মনে সুস্পষ্ট ধারণা জন্মে এজন্য পুস্তকের মধ্যে বহু অনুশীলনী দেওয়া হইয়াছে, এবং ভারতের নানা বিশ্ববিদ্যালয়ের প্রশ্নপত্র হইতে যত্নসহকারে সংগৃহীত বহু প্রশ্ন উহাদের মধ্যে সন্নিবেশিত হইয়াছে। অনুশীলনীর উদাহরণগুলি ক্রমিকভাবে এইরূপে সাজান হইয়াছে যে শিক্ষার্থিগণ বিনা সাহায্যে সহজে উহাদের সমাধান করিতে পারিবে। কঠিন স্থলে প্রমাণ কিংবা প্রমাণ নির্ণয়ের সঙ্কেত দেওয়া হইয়াছে। বস্তুতঃ ছাত্রগণের জ্যামিতি শিক্ষার পথ সুগম করিবার জন্য যথাসম্ভব চেষ্টা করা হইয়াছে। এখন, এই পুস্তক পাঠে শিক্ষার্থিগণ উপকৃত হইলে আমার শ্রম সফল জ্ঞান করিব।

প্রবেশিকা হইতে উচ্চতর শ্রেণীতেও জ্যামিতিক সত্যগুলি প্রয়োগ করিতে হয় এবং বর্ত্তমান নিয়মানুসারে ইংরেজিতেই এইরূপ প্রয়োগ করিতে হইবে। এইহেতু ছাত্রগণের সুবিধার জন্য জ্যামিতিক চিত্রগুলির নামকরণে এবং প্রতিজ্ঞার প্রমাণে ইংরেজি অক্ষর ও অঙ্ক ব্যবহৃত হইয়াছে।

এই পুস্তকের উন্নতি বিষয়ক যে কোন সমালোচনা বা পরামর্শ সাদরে গৃহীত হইবে।

এই পুস্তক প্রণয়ণ ও মুদ্রণে শ্রীযুক্ত গোবিন্দদেব ভট্টাচার্য্য, এম্-এ, শ্রীমান্ জীবননাথ বন্দ্যোপাধ্যায়, বি-এস্-সি, এবং বি. ব্যানার্জ্জী এণ্ড কোম্পানীর শ্রীযুক্ত রাজচন্দ্র পাল, বি-এল্. মহাশয় আমাকে যথেষ্ট সাহায্য করিয়াছেন। আমি তজ্জন্য তাঁহাদিগের নিকট কৃতজ্ঞ।

বিজ্ঞান কলেজ, কলিকাতা
অক্টোবর, ১৯৩৬ } শ্রীনৃপেন্দ্রনাথ সেন।

দ্বিতীয় সংস্করণের বিজ্ঞাপন.

এই সংস্করণে জ্যামিতির প্রতিজ্ঞাগুলির সাধারণ নির্ব্বচন বাংলা ও ইংরেজি উভয় ভাষায় দেওয়া হইয়াছে এবং পুস্তকের ভাষা কয়েকস্থলে সামান্য পরিবর্ত্তিত হইয়াছে। আশা করি বর্ত্তমান সংস্করণ শিক্ষার্থিগণের পক্ষে অধিকতর উপযোগী হইবে।

বিজ্ঞান কলেজ, কলিকাতা
ফেব্রুয়ারী, ১৯৩৭ } শ্রীনৃপেন্দ্রনাথ সেন।

তৃতীয় সংস্করণের বিজ্ঞাপন

এই সংস্করণে প্রতিজ্ঞাগুলির সাধারণ নির্ব্বচন বাংলা ও ইংরেজীতে পাশাপাশি ভাবে লিখিত হইয়াছে এবং বহু নূতন চিত্তাকর্ষক অনুশীলনী, উপাদেয় সমাধানের সঙ্কেত ও অনেক নূতন চিত্র পুস্তকে সন্নিবেশিত হইয়াছে। প্রমাণগুলিও সম্ভবস্থলে অধিকতর সবল করা হইয়াছে। বানানের পুরাতন পদ্ধতি ব্যবহার করা চলিবে বলিয়া সম্প্রতি কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় অভিমত প্রকাশ করিয়াছেন। বহু অভিজ্ঞ শিক্ষক মহাশয়গণের পরামর্শে বর্ত্তমান সংস্করণে পুরাতন বানান পদ্ধতিই ব্যবহৃত হইল। আশা করি এই সংস্করণ শিক্ষার্থীদিগের নিকট আরও বেশী উপযোগী হইবে।

বিজ্ঞান কলেজ, কলিকাতা
ডিসেম্বর, ১৯৩৭ } শ্রীনৃপেন্দ্রনাথ সেন।

সূচী

প্রথম খণ্ড

দ্বিতীয় খণ্ড

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বিষয়ক সম্পাদ্য :

তৃতীয় খণ্ড

বৃত্তবিষয়ক সম্পাদ্য :

পুস্তকে ব্যবহৃত

সাঙ্কেতিক চিহ্নের তালিকা

অতএব	স্থলে	∴
কারণ বা যেহেতু	"	∵
সমান	"	=
কোণ	"	∠
ত্রিভুজ	"	△
বৃহত্তর	"	>
ক্ষুদ্রতর	"	<
উপপাদ্য	"	উপ.
অনুচ্ছেদ	"	অনু.
ইহাই উপপাদ্য বিষয়	"	ই. উ. বি.
ইহাই সম্পাদ্য বিষয়	"	ই. স. বি.
কলিকাতা প্রবেশিকা	"	ক. প্র.
পাঞ্জাব প্রবেশিকা	"	পা. প্র.
পাটনা প্রবেশিকা	"	পাট. প্র.

ইত্যাদি

জ্যামিতি-পরিভাষা

——:•:——

GEOMETRY জ্যামিতি

acute angle সূক্ষ্মকোণ
adjacent সন্নিহিত
alternate একান্তর
alternative proof বিকল্প প্রমাণ
altitude, height উচ্চতা, উন্নতি
ambiguous দ্ব্যর্থক
analysis বিশ্লেষণ
angle কোণ
arc চাপ
area কালি, ক্ষেত্রফল
arm ভুজ, বাহু
axiom স্বতঃসিদ্ধ
axis অক্ষ
axis of projection অভিক্ষেপাক্ষ
axis of symmetry প্রতিসাম্য-অক্ষ
base ভূমি
bisection দ্বিখণ্ডন
bisector দ্বিখণ্ডক
boundary সীমা
centre কেন্দ্র
centre of gravity ভারকেন্দ্র
centre of inversion বিলোমকেন্দ্র
centre of similitude সাম্যকেন্দ্র
centroid ভরকেন্দ্র
chord জ্যা
circle বৃত্ত
circumcentre পরিকেন্দ্র
circumference পরিধি
circumscribed পরিলিখিত
circumscribed circle (circumcircle) পরিবৃত্ত
close approximation সূক্ষ্মমান, সন্নিহিত মান
co-axial সমাক্ষ
coincidence সমাপতন
collinear (points) একরেখীয়
complementary (angle) পূরক
concentric এককেন্দ্রীয়
concurrent সমবিন্দু
congruent সর্ব্বসম
conjugate অনুবন্ধী, প্রতিযোগী
constant of inversion বিলোমাঙ্ক
construction অঙ্কন
contact স্পর্শ

converse বিপরীত
converse proposition বিপরীত প্রতিজ্ঞা
corollary অনুসিদ্ধান্ত
corresponding (angle) অনুরূপ
curve (in general sense) রেখা
curved বক্র
cyclic বৃত্তস্থ

data উপাত্ত
deduction সিদ্ধান্ত
degree অংশ, ডিগ্রী
diameter ব্যাস
diagonal কর্ণ
diagonal scale কর্ণমাপনী
direct (tangent) সরল
direction দিক্
directly similar সমানুরূপ

enunciation নির্ব্বচন
equiangular সদৃশকোণ
equidistant সমদূরবর্ত্তী
equilateral সমবাহু
escribed বহির্লিখিত
ex-centre বহিঃকেন্দ্র
ex-circle বহির্বৃত্ত
exterior angle বহিঃকোণ
external বহিঃস্থ
external bisector বহির্দ্বিখণ্ডক

figure চিত্র

graph, লেখ
graphical লৈখিক
harmonic (section) সমঞ্জস
height (altitude দেখ)

hypotenuse অতিভুজ
hypothesis কল্পনা

identical একরূপ
image বিম্ব
incentre অন্তঃকেন্দ্র
incircle অন্তর্বৃত্ত
included angle অন্তর্ভূত কোণ
inscribed অন্তর্লিখিত
inscribed circle অন্তর্বৃত্ত
interior angle অন্তঃকোণ
internal অন্তঃস্থ
internal bisector অন্তর্দ্বিখণ্ডক
intersection ছেদ, প্রতিচ্ছেদ
inverse বিপরীত, ব্যস্ত
inversely similar ব্যস্ত অনুরূপ
inversion বিলোমক্রিয়া
irregular বিষম
isosceles সমদ্বিবাহু

limiting point পরিণামবিন্দু
line রেখা
locus সঞ্চারপথ

major arc অধিচাপ
measurement মাপন। মাপ
median মধ্যমা
minor arc উপচাপ
minute মিনিট, কলা

nine points circle নববিন্দু বৃত্ত
normal অভিলম্ব

obtuse angle স্থূলকোণ
opposite (*e. g.*, angle) বিপরীত
orthocentre লম্ববিন্দু
orthogonal সমকোণীয়
orthogonal projection লম্ব-অভিক্ষেপ

parallel সমান্তরাল
parallelogram সামান্তরিক
pedal triangle পাদত্রিভুজ
pentagon পঞ্চভুজ
perimeter পরিসীমা
perpendicular লম্ব
perpendicular bisector লম্ব-দ্বিখণ্ডক

plane সমতল
point বিন্দু
point of concurrency সম্পাতবিন্দু

polar মেরুরেখা
pole মেরু

polygon বহুভুজ
postulate স্বীকার্য্য
practical ব্যবহারিক, ফলিত
problem সম্পাদ্য। প্রশ্ন
projected অভিক্ষিপ্ত
projection অভিক্ষেপ
proof প্রমাণ
proportional আনুপাতিক
proposition প্রতিজ্ঞা
proved প্রমাণিত

quadrilateral চতুর্ভুজ, চতুষ্কোণ

radical axis মূলাক্ষ
radical centre মূলকেন্দ্র
radius অর, ব্যাসার্দ্ধ
radius of inversion বিলোম ব্যাসার্দ্ধ

rectangle আয়তক্ষেত্র
rectilineal figure ঋজুরেখ ক্ষেত্র
reflex angle প্রবৃদ্ধ কোণ
regular সুষম
rhombus রম্বস
right angle সমকোণ
rough approximation স্থূলমান
ruler (scale দেখ)

scale, ruler মাপনী
scalene বিষমভুজ
secant ছেদক

second সেকেণ্ড, বিকলা
sector বৃত্তকলা
segment (of a circle) বৃত্তাংশ
segment (of a line) খণ্ড, অংশ
self-conjugate স্বানুবন্ধ
self-evident স্বতঃপ্রমাণ
semi-circle অর্দ্ধবৃত্ত
side ভুজ, বাহু
similar (triangle) সদৃশ
similarity সাদৃশ্য
similitude সাম্য
size আয়তন
solid ঘন। ঘন বস্তু
space স্থান। দেশ
square বর্গক্ষেত্র
straight সরল, ঋজু
straight angle সরল কোণ
subtended angle সম্মুখ কোণ
superposition উপরিপাত
supplementary (angle) সম্পূরক
surface তল, পৃষ্ঠ
symmetry প্রতিসাম্য
synthesis সংশ্লেষণ

tangent স্পর্শক
theoretical তত্ত্বীয়, বাদীয়
theorem উপপাদ্য
transversal ভেদক
transverse (tangent) তির্য্যক
trapezium ট্রাপিজিয়ম
triangle ত্রিভুজ, ত্রিকোণ
trisection ত্রিখণ্ডন

vertex শীর্ষ
vertical angle শিরঃকোণ
vertically opposite বিপ্রতীপ

সহজ জ্যামিতি

প্রথম খণ্ড

ঘন, তল, রেখা ও বিন্দু

১। ঘন (Solid)। কোন বস্তু যে স্থান ব্যাপিয়া অবস্থান করে, তাহাকে ঘন বলে।*

২। **প্রত্যেক ঘন দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট।**

দৃষ্টান্ত স্বরূপ একখানি ঘর যে স্থান ব্যাপিয়া থাকে তাহা লক্ষ্য কর। ঘরের মেঝের বড় ধারটি উহার দৈর্ঘ্য, ছোট ধারটি উহার প্রস্থ এবং ঘরটির উচ্চতা উহার বেধ। একটি বাক্স বা একখানি ইটের আকার পরীক্ষা করিলে দেখিতে পাওয়া যাইবে যে ঐগুলিও দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট।

অন্যান্য ঘনের মধ্যে যেগুলি ঘর বা বাক্সের আকার বিশিষ্ট নহে সেগুলিও বাক্সের আকার বিশিষ্ট ছোট বড় নানা অংশের সমষ্টি; সুতরাং উহাদেরও দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং বেধ আছে।

দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ, ইহাদের প্রত্যেকটিকে **আয়তন** (Dimension) বলে। অতএব, ঘন তিন আয়তন বিশিষ্ট।

---

* এখানে লক্ষ্য করিতে হইবে যে 'স্থান'কেই ঘন বলা হয়, বস্তুকে নহে। জ্যামিতিতে 'Solid' শব্দটি এই বিশেষ অর্থেই ব্যবহার করা হইয়া থাকে।

৩। **তল** (Surface)। ঘনের উপরিভাগকে তল বলে।

যথা, কোন বাক্সের ছয়টি পিঠ, জলের উপরিভাগ, ইহারা তল। তল ঘনের প্রান্ত বা সীমানা; সুতরাং, তলের বেধ নাই; কারণ, বেধ থাকিলে ইহা ঘনের প্রান্ত না হইয়া উহার একটি অংশ হইত। জলের উপরিভাগ একটি তল। ইহা জল ও বায়ুর মধ্যবর্ত্তী সীমানা; সুতরাং, ইহা বায়ুও নহে, জলও নহে, অর্থাৎ ইহার বেধ নাই, কিন্তু ইহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে। অন্যান্য তলও এইরূপ। অতএব,

তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কিন্তু বেধ নাই; অর্থাৎ তলের আয়তন দুইটি।

৪। **রেখা** (Line)। দুই তল যে স্থলে মিলিত হয় তাহাকে রেখা বলে। রেখা তলের প্রান্ত বা সীমানা।

তলের বেধ নাই বলিয়া রেখারও বেধ থাকিতে পারে না। আবার, রেখা তলের প্রান্ত বা সীমানা বলিয়া ইহার বিস্তার নাই, কিন্তু ইহার দৈর্ঘ্য আছে। অতএব,

রেখার দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ ও বেধ নাই, অর্থাৎ রেখার আয়তন একটি।

৫। **বিন্দু** (Point)। দুই রেখা যে স্থলে মিলিত হয় তাহাকে বিন্দু বলে।

রেখার প্রস্থ এবং বেধ নাই, সুতরাং, বিন্দুরও প্রস্থ এবং বেধ থাকিতে পারে না। আবার, বিন্দু রেখার প্রান্ত বা সীমানা; কাজেই বিন্দুর দৈর্ঘ্যও নাই। অতএব, **বিন্দুর অবস্থিতি আছে মাত্র; কিন্তু দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নাই**; অর্থাৎ, বিন্দুর কোন আয়তন নাই।

৬। **বিন্দু, রেখা, তল প্রভৃতির তুলনা ও পরস্পর সম্বন্ধ।**

বিন্দুর অবস্থিতি আছে, কিন্তু দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নাই;

রেখার দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ ও বেধ নাই;

তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে কিন্তু বেধ নাই,

ঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে;

সুতরাং ঘন, তিন আয়তন বিশিষ্ট;

তল, দুই আয়তন বিশিষ্ট;

রেখা, এক আয়তন বিশিষ্ট;

এবং বিন্দুর কোন আয়তন নাই।

ঘন, তলদ্বারা সীমাবদ্ধ;

তল, রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ; দুই তল মিলিত হইলে রেখা উৎপন্ন হয়।

রেখা, বিন্দুদ্বারা সীমাবদ্ধ; দুই রেখা মিলিত হইলে বিন্দু উৎপন্ন হয়।

৭। গণিত শাস্ত্রের যে অংশে ঘন, তল, রেখা ও বিন্দুর বিষয় আলোচিত হয় তাহাকে **জ্যামিতি** (Geometry) বলে।

৮। **বিন্দু ও রেখা অঙ্কন।**

সাধারণতঃ কাগজ, বোর্ড ইত্যাদির উপর একটি ছোট গোল চিহ্ন দিয়া বিন্দু অঙ্কিত করা হয়। কিন্তু ইহা জ্যামিতিক বিন্দু নহে; কারণ, যতই ছোট হউক না কেন, ইহার কিছু আয়তন থাকিবেই। তবে চিহ্ন যত ছোট হইবে, ততই ইহা জ্যামিতিক বিন্দুর কাছাকাছি হইবে।

কাগজের উপর পেন্সিলের সরু অগ্রভাগ টানিয়া রেখা অঙ্কিত করা হয়। এইরূপ রেখা খুব সরু হইলেও ইহার কিছু প্রস্থ থাকিবেই; সুতরাং, ইহা জ্যামিতিক রেখা হইতে পারে না। জ্যামিতিক বিন্দুর মত জ্যামিতিক রেখা অঙ্কনও অসম্ভব। তবে রেখাটি যতদূর সম্ভব সরু করিলেই উহা জ্যামিতিক রেখার কাছাকাছি হইবে।

মন্তব্য। এস্থলে দেখা গেল যে পেন্সিলের অগ্রবিন্দুর গতি দ্বারা রেখা উৎপন্ন হয়। এইরূপ ভাবে দেখান যায় যে রেখার গতি দ্বারা তল, এবং তলের গতি দ্বারা ঘন উৎপন্ন হয়।

সরল রেখা (Straight Line)

৯। **সরল রেখা।** যে রেখার এক বিন্দু হইতে অন্য যে কোন বিন্দুতে যাইতে দিক্ পরিবর্ত্তন করিতে হয় না, তাহাকে সরল রেখা বলে।

সরল রেখার দুই প্রান্তে দুইটি অক্ষর লিখিয়া উহার নাম প্রকাশ করিতে হয়। পার্শ্বের চিত্রে AB একটি সরল রেখা।

'A ও B বিন্দু দুইটি সংযুক্ত কর' বলিলে A হইতে B পর্য্যন্ত একটি সরল রেখা অঙ্কিত করা বুঝায়।

AB সরল রেখার দৈর্ঘ্যকে A ও B **বিন্দুর দূরত্ব** (Distance) বলা হয়।

১০। **বক্র রেখা** (Curved line)। যে রেখার এক বিন্দু হইতে অন্য বিন্দুতে যাইতে ক্রমাগত দিক্ পরিবর্ত্তন করিতে হয়, তাহাকে বক্র রেখা বলে।

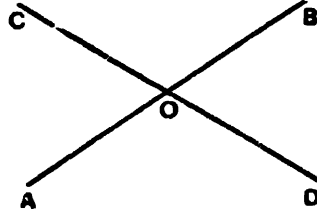
১১। **সরল রেখার বিশেষত্ব।**

(ক) **দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর মধ্যে একটিমাত্র সরল রেখা টানা যাইতে পারে।**

কারণ, দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর মধ্যে একটি মাত্র দিক্ আছে; সুতরাং, সরল রেখা-ক্রমে এক বিন্দু হইতে অন্য বিন্দুতে যাইতে হইলে মাত্র এক ভাবেই যাওয়া চলিবে (৯ অনু.)।

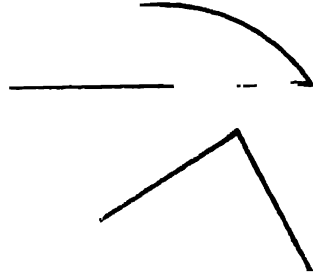
অর্থাৎ, বিন্দু দুইটির মধ্যে মাত্র একটি সরল রেখা টানা চলিবে।

(খ) **দুইটি বিভিন্ন সরল রেখা একাধিক বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে না।**

কারণ, যদি দুইটি বিভিন্ন সরল রেখা দুই বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে ঐ দুই বিন্দুর মধ্যে দুইটি সরল রেখা টানা হইল; কিন্তু ইহা অসম্ভব [(ক) দেখ]।

অতএব, দুইটি বিভিন্ন সরলরেখা একাধিক বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে না।

(খ)কে এরূপ ভাবেও প্রকাশ করা হইয়া থাকে :

দুইটি সরল রেখা কোন স্থান সীমাবদ্ধ করিতে পারে না।

কারণ, কোন স্থান সীমাবদ্ধ করিতে হইলে সরল রেখা দুইটির অন্ততঃ দুই বিন্দুতে মিলিত হওয়া চাই।

মন্তব্য। কোন স্থান সীমাবদ্ধ করিতে হইলে অন্ততঃ তিনটি সরল রেখা দরকার।

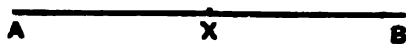
(গ) **এক সরল রেখাকে অপর একটি সরল রেখার উপর স্থাপন করিলে উহারা পরস্পর মিলিয়া যাইবে।**

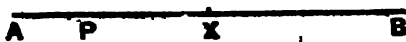
মনে কর, CD সরল রেখাকে ABএর উপর স্থাপন করা হইল। এখন যদি তাহারা পরস্পর মিলিয়া না যায়, তবে তাহারা স্থান সীমাবদ্ধ

করিবে (চিত্র); কিন্তু ইহা অসম্ভব [(খ) দেখ]; সুতরাং, সরল রেখা দুইটি পরস্পর মিলিয়া যাইবে।

১২। **সমান সরল রেখা**। এক সরল রেখাকে অপর একটির উপর রাখিলে যদি একের দুই প্রান্ত অন্যটির দুই প্রান্তের সহিত মিলিয়া যায়, তাহা হইলে সরল রেখা দুইটিকে সমান বলা হয়।

১৩। **সরল রেখার মধ্যবিন্দু**। যে বিন্দু কোন সরল রেখাকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে তাহাকে ঐ সরল রেখার **মধ্যবিন্দু** (Middle point) বলে। চিত্রে AX এবং BX সমান, সুতরাং X, ABএর মধ্যবিন্দু।

A X B

১৪। **প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সরল রেখার একটি মাত্র মধ্যবিন্দু আছে।**

মনে কর P বিন্দু AB সরল রেখার A বিন্দু হইতে B বিন্দুর দিকে যাইতেছে। তাহাতে, AP অংশের দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ বাড়িতে থাকিবে এবং PB অংশের দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে। সুতরাং, A হইতে Bএর পথে P এমন একটি মাত্র অবস্থান অতিক্রম করিবে যেখানে AP এবং PB পরস্পর সমান হইবে। এই অবস্থানটি X হইলে, Xই হইবে ABএর একমাত্র মধ্যবিন্দু।

A P X B

১৫। **সমতল** (Plane)। কোন তলের যে কোন দুইটি বিন্দুর যোজক সরল রেখা সেই তলের সহিত সম্পূর্ণভাবে মিলিত হইয়া থাকিলে ঐ তলকে সমতল বলে।

আয়নার উপরিভাগ, জলের উপরিভাগ, টেবিলের উপরিভাগ, ইত্যাদিকে মোটামুটি সমতল বলা যায়।

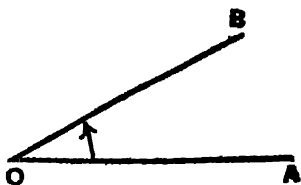
কোন তল সমতল না হইলে উহাকে **অসমতল** (Curved surface) বলা হয়।

একটি মার্বেলের উপরিভাগ অসমতল।

কোণ (Angle)

১৬। **কোণ।** দুইটি বিভিন্ন সরল রেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে কোণ উৎপন্ন হয়। বিন্দুটিকে কোণের **শীর্ষ** (Vertex), এবং সরল রেখা দুইটিকে কোণের **বাহু** (Sides, arms) বলে।

পার্শ্বের চিত্রে, AOB একটি কোণ; O বিন্দুটি ইহার শীর্ষ এবং OA, OB সবল বেখা দুইটি ইহাব বাহু। এই কোণকে BOA কোণও বলা হয়। কোণের শীর্ষ-সূচক অক্ষবটিকে মধ্যস্থলে রাখিয়া কোণের নাম কবিতে হয়।

১৭। **কোণের পরিমাণ।** O বিন্দুকে স্থির রাখিয়া OB রেখাটিকে তীব চিহ্নেব দিকে ঘুরাইতে থাক। যে পবিমাণ ঘুবাইলে উহা চিত্রের OA অবস্থান হইতে OB অবস্থানে যাইবে, তাহাই AOB কোণেব পবিমাণ।

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে উক্ত ঘূর্ণনের পবিমাণ OA কিংবা OB বাহুর দৈর্ঘ্যেব উপর নির্ভব করে না। সুতবাং,

কোণের পরিমাণ উহার বাহুর দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে না।

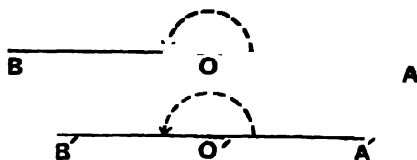
১৮। **সরল কোণ** (Straight angle)। যে কোণেব বাহুদ্বয় শীর্ষের বিপবীত দিকে একই সরল বেখায় অবস্থিত, তাহাব নাম **সরল কোণ।**

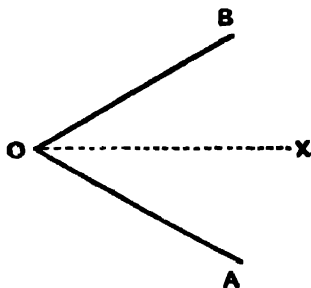
পার্শ্বের চিত্রে, AOB কোণের OA এবং OB বাহু O বিন্দুর

বিপরীত দিকে একই সরল রেখায় অবস্থিত আছে ; সুতরাং AOB কোণ একটি সরল কোণ ; এইরূপ, BOA কোণ একটি সরল কোণ।

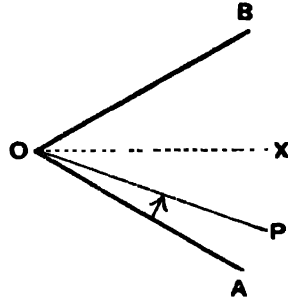
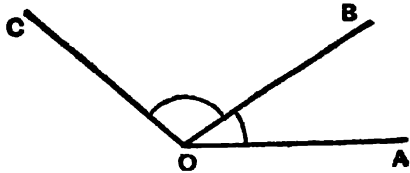
১৯। **সমান কোণ** (Equal angles)। যদি কোন কোণকে অপর এক কোণের উপর এরূপ ভাবে স্থাপন করা যায় যেন একের শীর্ষ এবং বাহু দুইটি যথাক্রমে অপরের শীর্ষ এবং বাহু দুইটির সঙ্গে মিলিয়া যায়, তবে কোণ দুইটিকে পরস্পর সমান বলা হয়।

২০। **সকল সরল কোণ পরস্পর সমান।**

মনে কর, AOB এবং A′O′B′ যে কোন দুইটি সরল কোণ। A′B′ সরল রেখাকে ABএর উপর এরূপ ভাবে স্থাপন কর যেন O′ বিন্দু O বিন্দুর উপর এবং O′A′, OAএর উপর পড়ে। এখন, যেহেতু A′O′B′ এবং AOB সরল রেখাদ্বয় পরস্পর মিলিয়া যাইবে [১১ অনু. (গ)], সুতরাং, A′O′B′ সরল কোণের শীর্ষ ও বাহুদ্বয়, যথাক্রমে AOB সরল কোণের শীর্ষ ও বাহুদ্বয়ের সহিত মিলিয়া যাইবে, অর্থাৎ, A′O′B′ সরল কোণ এবং AOB সরল কোণ পরস্পর সমান (১৯ অনু.)।

অতএব, সকল সরল কোণই পরস্পর সমান।

২১। **কোণের দ্বিখণ্ডক** (Bisector of an angle)। যে সরল রেখা কোন কোণকে দুই সমান ভাগে ভাগ করে তাহাকে ঐ কোণের দ্বিখণ্ডক বলে।

পার্শ্বের চিত্রে OX রেখাটি AOB কোণের দ্বিখণ্ডক।

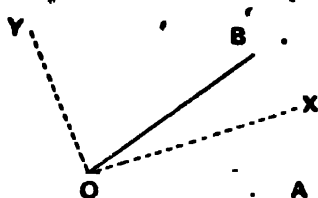
২২। প্রত্যেক কোণের একটিমাত্র দ্বিখণ্ডক আছে।

মনে কর O-বিন্দু স্থির আছে এবং OP সরল রেখাটি তীর চিহ্নের দিকে ঘুরিতে ঘুরিতে OA অবস্থান হইতে OBএর দিকে যাইতেছে (চিত্র)। তাহা হইলে, AOP কোণ ক্রমশঃ বড় এবং POB কোণ ক্রমশঃ ছোট হইতে থাকিবে। সুতরাং, OB অবস্থানে যাইবার পথে OP এমন একটি মাত্র অবস্থান অতিক্রম করিবে যেখানে AOP ও BOP কোণ পরস্পর সমান। এই অবস্থানটি OX সরল রেখা হইলে, OXই হইবে AOB কোণের একমাত্র দ্বিখণ্ডক।

২৩। **সন্নিহিত কোণ** (Adjacent angles)। দুইটি কোণের একটি সাধারণ শীর্ষ থাকিলে এবং উহারা একই সাধারণ বাহুর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইলে উহাদিগকে **সন্নিহিত কোণ** বলে।

সাধারণ বাহু ছাড়া অন্য দুইটি বাহুকে সন্নিহিত কোণদ্বয়ের **বহির্বাহু** (Exteriors arms) বলা হয়।

উপরের চিত্রে BOA, BOC কোণদ্বয় সন্নিহিত কোণ; OB উহাদের সাধারণ বাহু; এবং OA ও OC উহাদের বহির্বাহু।

দ্রষ্টব্য। AOB কোণ ও BOC কোণ একত্রযোগে AOC কোণের সমান; অর্থাৎ

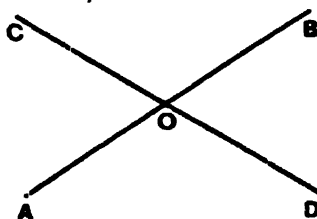
দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি উহাদের বহির্বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান।

২৪। **বহিঃকোণ, অন্তঃকোণ; বহির্দ্বিখণ্ডক ও অন্তর্দ্বিখণ্ডক**। কোন কোণের একটি বাহুকে বাড়াইয়া দিলে যে সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে পূর্ব্বোক্ত কোণের **বহিঃকোণ** (Exterior angle) বলে এবং পূর্ব্বোক্ত কোণটিকে শেষোক্ত কোণটির **অন্তঃকোণ** বলা হয়।

চিত্রে, AOB কোণের AO বাহুকে C পর্য্যন্ত বৰ্দ্ধিত করা হইয়াছে। সুতরাং BOC কোণ, AOB কোণের বহিঃকোণ; এবং AOB কোণ, BOC কোণের অন্তঃকোণ।

অন্তঃকোণের দ্বিখণ্ডক এবং বহিঃকোণের দ্বিখণ্ডককে যথাক্রমে অন্তঃকোণের **অন্তর্দ্বিখণ্ডক** (Internal bisector) ও **বহির্দ্বিখণ্ডক** (External bisector) বলা হয়।

উপরের চিত্রে, OX, OY যথাক্রমে AOB এবং BOC কোণের দ্বিখণ্ডক; সুতরাং, OX, OY যথাক্রমে AOB কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক।

২৫। **বিপ্রতীপ কোণ** (Vertically opposite angles)।

দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে ছেদ-বিন্দুর বিপরীত দিকে অবস্থিত কোণ দুইটিকে **বিপ্রতীপ কোণ** বলে।

চিত্রে, AOC এবং BOD কোণ দুইটি বিপ্রতীপ কোণ; এইরূপ, BOC এবং AOD কোণ দুইটিও বিপ্রতীপ কোণ।

২৬। **সমকোণ** (Right angle) ; **লম্ব** (Perpendicular)।

একটি সরল রেখা অপর একটি সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে যদি উৎপন্ন সন্নিহিত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ কোণ দুইটির প্রত্যেকটিকে **সমকোণ** বলে ; এবং সরল রেখা দুইটির একটিকে অন্যটির **লম্ব** (Perpendicular) বলে। পার্শ্বের চিত্রে, AOC এবং BOC কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি সমকোণ। OC, ABএর উপর লম্ব, এবং AB, OCএর উপর লম্ব।

C

B O A

বিশেষ দ্রষ্টব্য (১)। AOC এবং BOC কোণ দুইটি পরস্পর সমান ; সুতরাং, লম্ব OC, AOB সরলকোণের দ্বিখণ্ডক। অতএব,

AB সরল রেখার O বিন্দু হইতে ABএর উপর একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত করা যায়। (২২ অনু.)।

বিশেষ দ্রষ্টব্য (২)। AOB সরল কোণ দুই সমকোণের সমান।

অতএব, **এক সরল কোণ = দুই সমকোণ**।

বিশেষ দ্রষ্টব্য (৩)। সকল সরল কোণ পরস্পর সমান (২০ অনু.) ; সুতরাং, সমকোণ সরল কোণের অর্দ্ধেক বলিয়া,

সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

২৭। এক সমকোণকে 90 সমান ভাগে ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগকে এক **ডিগ্রী** (1°) বলে, প্রত্যেক ডিগ্রীকে 60 সমান ভাগে ভাগ করিলে, প্রত্যেক ভাগকে এক **মিনিট** ($1'$), এবং প্রত্যেক মিনিটকে 60 সমান ভাগে ভাগ করিলে, প্রত্যেক ভাগকে এক **সেকেণ্ড** ($1''$) বলে।

অর্থাৎ, 1 সমকোণ = 90 ডিগ্রী (90°),

1 ডিগ্রী = 60 মিনিট ($60'$) ;

1 মিনিট = 60 সেকেণ্ড (60″);
1 সরল কোণ = 2 সমকোণ = 180°।

২৮। মনে কর AB একটি সরল রেখা, এবং উহার O বিন্দু হইতে OC ও ODকে ABএর উপর লম্ব টানা হইয়াছে (চিত্র দেখ)। এখন, O বিন্দুকে স্থির রাখিয়া OP রেখাটিকে OA অবস্থান হইতে তীর চিহ্নের দিকে ঘুরাইতে থাক। OP যখন OC অবস্থানে আসিবে

তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ এক সমকোণ বা 90° হইবে।

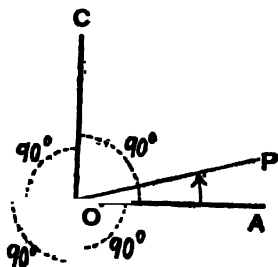
আরও কিছু ঘুরাইলে OP যখন OB অবস্থানে আসিয়া AOএর সহিত একই সরল রেখায় অবস্থিত হইবে, তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ এক সরল কোণ বা দুই সমকোণ বা 180° হইবে।

OPকে আরও ঘুরাইতে থাকিলে উহা যখন OD অবস্থানে আসিবে তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ হইবে তিন সমকোণ বা 270°।

আরও খানিকটা ঘুরাইলে যখন OP, OA অবস্থানে ফিরিয়া আসিবে অর্থাৎ যখন, OP একবার পূর্ণ আবর্তন করিবে, তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ হইবে দুই সরল কোণ বা চারি সমকোণ বা 360°।

৪৯। **সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ, প্রবৃদ্ধ কোণ।**

যে কোণ এক সমকোণ হইতে ছোট তাহাকে **সূক্ষ্মকোণ** (Acute angle) বলে।

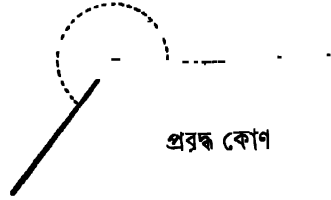
সুতরাং, সূক্ষ্মকোণ 90° হইতে ছোট।

সূক্ষ্মকোণ

যে কোণ এক সমকোণ হইতে বড় কিন্তু দুই সমকোণ হইতে ছোট তাহাকে **স্থূলকোণ** (Obtuse angle) বলে।

স্থূলকোণ

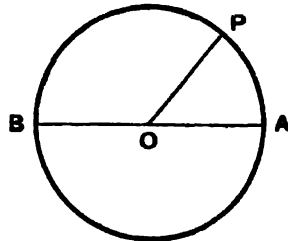
স্থূলকোণের পরিমাণ 90° হইতে বড় এবং 180° হইতে ছোট।

যে কোণ এক সরল কোণ বা দুই সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা ছোট তাহাকে **প্রবৃদ্ধ** (Re-entrant, Reflex) **কোণ** বলে।

প্রবৃদ্ধ কোণ

প্রবৃদ্ধ কোণের পরিমাণ 180° হইতে বড় এবং 360° হইতে ছোট।

সামতলিক ক্ষেত্র (Plane Figure)

৩০। এক বা একাধিক রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **সামতলিক ক্ষেত্র** বলে।

৩১। **বৃত্ত** (Circle)। যদি কোন সামতলিক ক্ষেত্র একটি রেখা দ্বারা এইরূপে সীমাবদ্ধ হয় যে তাহার অন্তর্গত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উক্ত রেখা পর্যন্ত যতগুলি সরল রেখা টানা যায় তাহারা পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে **বৃত্ত** বলে।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলা হয়; এবং যে রেখা দ্বারা ক্ষেত্রটি সীমাবদ্ধ হয় তাহাকে বৃত্তের **পরিধি** (Circumference) বলে।

উপরের চিত্রে O বিন্দুটি কেন্দ্র, APB বক্র রেখাটি বৃত্তের **পরিধি**।

৩২। **ব্যাসার্দ্ধ** (Radius)। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখার নাম **ব্যাসার্দ্ধ** বা **অর**।

অতএব, **ব্যাসার্দ্ধগুলি পরস্পর সমান**।

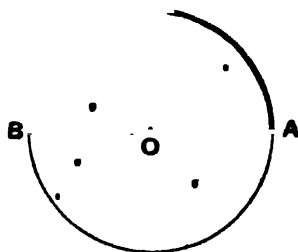
৩১ অনুচ্ছেদের চিত্রে, OA, OB ও OP প্রত্যেকেই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ।

৩৩। **ব্যাস** (Diameter)। যে সরল রেখা বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া উভয়দিকে উহার পরিধি পর্য্যন্ত বিস্তৃত, তাহার নাম **ব্যাস**।

নিম্নের চিত্রে, AB সরল রেখাটি **ব্যাস**।

যেহেতু, AB = OA + OB = দুইটি ব্যাসার্দ্ধের সমষ্টি,

সুতরাং, **ব্যাস = ব্যাসার্দ্ধ** × 2।

৩৪। **অর্দ্ধবৃত্ত** (Semi-circle)। ব্যাসের দ্বারা বৃত্ত যে দুইটি অংশে বিভক্ত হয় তাহাদের প্রত্যেকটিকে অর্দ্ধবৃত্ত বলে।

৩৫। **চাপ** (Arc)। পরিধির যে কোন অংশকে চাপ বলে।

৩১ অনুচ্ছেদের চিত্রে AP একটি চাপ।

অনুশীলনী ১

১। ঘন, তল, রেখা ও বিন্দুর পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

২। সরল রেখা কাহাকে বলে? বুঝাইয়া দাও যে সরল রেখার যে কোন অংশও সরল রেখা হইবে।

৩। 'A বিন্দু হইতে B বিন্দুর দূরত্ব' বলিতে কি বুঝায়?

৪। প্রমাণ কর যে প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সরল রেখার একটি মাত্র মধ্যবিন্দু আছে।

৫। সরল কোণ কাহাকে বলে? বুঝাইয়া দাও যে প্রত্যেক সরল কোণ দুই সমকোণের সমান।

৬। সমান কোণ কাহাকে বলে? প্রমাণ কর যে, সকল সরল কোণ পরস্পর সমান, এবং সকল সমকোণও পরস্পর সমান।

৭। যুক্তি দ্বারা দেখাও যে, কোন সরল রেখার একটি বিন্দু হইতে ঐ সরল রেখার উপর একাধিক লম্ব অঙ্কিত করা যায় না। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

৮। কোন সরল রেখার একটি প্রান্ত স্থির রাখিয়া উহাকে একই দিকে ক্রমশঃ ঘুরাইতে থাকিলে যে যে কোণ উৎপন্ন হইবে তাহাদের নাম লেখ; এক পূর্ণ আবর্ত্তনে যে কোণ উৎপন্ন হইবে তাহার পরিমাণ কত?

৯। নিম্নলিখিত কোণগুলির কোন্‌টি সূক্ষ্ম, কোন্‌টি স্থূল, কোন্‌টি প্রবৃদ্ধ স্থির কর:

$50°, 60°, 175°, 35°, 350°, 290°, 45°$।

১০। সন্নিহিত কোণ কাহাকে বলে? দুইটি সন্নিহিত কোণের পরিমাণ (ক) $60°, 30°$, (খ) $120°, 60°$, (গ) $90°, 30°$;

উহাদের বহির্ব্বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ কত?

১১। ১৪ অনুচ্ছেদের চিত্রে প্রমাণ কর যে $BP - AP = 2\ PX$।

১২। ২২ অনুচ্ছেদের চিত্রে প্রমাণ কর যে

$$\angle BOP - \angle AOP = 2\angle POX$$।

উপপাদ্য ও সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

(Theorems and Problems)

৩৬। জ্যামিতি শাস্ত্রের যে অংশে সমতলের উপর অঙ্কিত কোণ, রেখা ও বিন্দুবিষয়ক আলোচনা আছে তাহাকে **সামতলিক জ্যামিতি** (Plane Geometry) বলা হয়।

৩৭। **প্রতিজ্ঞা**। জ্যামিতি শাস্ত্রের আলোচ্য বিষয়গুলিকে বিভিন্ন অংশে ভাগ করিয়া লওয়া হয়। এইরূপ অংশকে **প্রতিজ্ঞা** (Proposition) বলে।

৩৮। **উপপাদ্য** ও **সম্পাদ্য**। প্রতিজ্ঞা দুই প্রকার: (১) **উপপাদ্য** ; (২) **সম্পাদ্য**।

যে প্রতিজ্ঞায় কোন জ্যামিতিক সত্য প্রমাণ করিতে হয় তাহাকে **উপপাদ্য** (Theorem) বলে।

যে প্রতিজ্ঞায় কোন জ্যামিতিক অঙ্কন কার্য্য করিতে হয় তাহাকে **সম্পাদ্য** (Problem) বলা হয়।

৩৯। **প্রতিজ্ঞার চারিটি প্রধান অংশ**।

প্রত্যেক প্রতিজ্ঞাকেই নিম্নলিখিত কয়েকটি প্রধান অংশে বিভক্ত করা যায়:

(১) **সাধারণ নির্ব্বচন** (General Enunciation)। ইহাতে সাধারণ ভাষায় প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য বর্ণিত হয়।

(২) **বিশেষ নির্ব্বচন** (Particular Enunciation)। ইহাতে সাধারণ নির্ব্বচনে বর্ণিত বিষয় চিত্র সাহায্যে বিশেষ ভাবে বিবৃত হইয়া থাকে।

(৩) **অঙ্কন** (Construction)। ইহাতে প্রতিজ্ঞার সত্য প্রমাণের জন্য যে সমস্ত অঙ্কনের আবশ্যক তাহা বিবৃত হয়।

(৪) **প্রমাণ** (Proof)। ইহাতে যুক্তি দ্বারা উপপাদ্যের সত্যতা অথবা সম্পাদ্য-নির্দ্দিষ্ট অঙ্কনের বিশুদ্ধতা প্রদর্শিত হয়।

৪০। **কল্পনা** (Hypothesis) এবং **সিদ্ধান্ত** (Conclusion)। উপপাদ্যের সাধারণ নির্ব্বচন দুই ভাগে বিভক্ত :

(১) **কল্পনা,** অর্থাৎ যাহা সত্য বলিয়া ধরিয়া লওয়া হয়।

(২) **সিদ্ধান্ত,** অর্থাৎ যাহা প্রমাণ করিতে হইবে।

৪১। **উপাত্ত** (Data) ও **করণীয়** (Quaesita)।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার সাধারণ নির্ব্বচনও দুই ভাগে বিভক্ত :

(১) **উপাত্ত,** অর্থাৎ যাহা দেওয়া আছে।

(২) **করণীয়,** অর্থাৎ যাহা অঙ্কন করিতে হইবে।

৪২। **অনুসিদ্ধান্ত** (Corollary)। যদি একটি উপপাদ্যের সাহায্যে অন্য একটি উপপাদ্য অতি সহজে প্রমাণ করা যায়, তাহা হইলে শেষোক্ত উপপাদ্যকে পূর্ব্বোক্ত উপপাদ্যের **অনুসিদ্ধান্ত** বলে।

স্বতঃসিদ্ধ (Axioms)

৪৩। গণিতশাস্ত্রের যাবতীয় যুক্তি কতকগুলি সহজ নিয়মের উপর প্রতিষ্ঠিত, ইহাদের সত্যতা এতই সুস্পষ্ট যে ইহাদিগকে বিনা প্রমাণেই গ্রহণ করা হইয়া থাকে। এই সহজ নিয়মগুলিকে **স্বতঃসিদ্ধ** বলে।

নিম্নে কতকগুলি **স্বতঃসিদ্ধের** উল্লেখ করা হইল :

(১) যে সকল বস্তুর প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

(২) সমান সমান বস্তুতে সমান সমান বস্তু বা একই বস্তু যোগ করিলে সমষ্টিগুলিও পরস্পর সমান হয়।

(৩) সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বা একই বস্তু বিয়োগ করিলে, অবশিষ্টগুলিও পরস্পর সমান হয়।

(৪) সমান সমান বস্তু একই সংখ্যা দ্বারা গুণিত হইলে গুণফলগুলিও পরস্পর সমান হয়।

যেমন, সমান সমান সংখ্যার দ্বিগুণগুলিও পরস্পর সমান।

(৫) সমান সমান বস্তু একই সংখ্যা দ্বারা ভাজিত হইলে ভাগফল-গুলিও পরস্পর সমান হয়।

যেমন, সমান সমান সংখ্যার অর্দ্ধেকগুলিও পরস্পর সমান।

(৬) অসমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে সমষ্টিগুলি পরস্পর অসমান হয়।

(৭) অসমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট-গুলিও অসমান হয়।

(৮) একটি সম্পূর্ণ রাশি তাহার যে কোন অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।

(৯) যে যে রাশি পরস্পর সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যায় তাহারা সমান।

৪৪। **উপরিপাত** (Superposition)। ৯ম স্বতঃসিদ্ধের অর্থ এইরূপ : কোনও জ্যামিতিক রাশি (রেখা, কোণ বা ক্ষেত্র)কে উহার আকার বা গঠনের পরিবর্ত্তন না করিয়া তুলিয়া লও, এবং অপর একটি অনুরূপ রাশির উপর স্থাপন কর। যদি উহারা পরস্পর মিলিয়া যায়, তবে রাশি দুইটি সর্ব্বতোভাবে সমান।

ইহাকে **উপরিপাত** প্রক্রিয়া (Superposition) বলা হয়। এই নিয়মেই ১২ অনুচ্ছেদে দুইটি সরল রেখার এবং ১৯ অনুচ্ছেদে দুইটি কোণের সমতা নির্ণয় করা হইয়াছে।

জ্যামিতিক অঙ্কন (Geometrical Construction)

৪৫। সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার যাবতীয় অঙ্কন কার্য্য নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলির সাহায্যেই করিতে হয়।*

(১) একটি ইঞ্চি ও সেণ্টিমিটর চিহ্নযুক্ত সরল মাপনী (Ruler) ;

(২) একটি কাঁটা কম্পাস (Dividers) ;

(৩) একটি পেন্সিল কম্পাস (Pencil compasses) ।

স্বীকার্য্য (Postulate)

৪৬। কতকগুলি সহজ জ্যামিতিক অঙ্কন প্রমাণ ব্যতীত করিতে দেওয়া হয়। ইহাদিগকে **স্বীকার্য্য** বলে।

নিম্নে কয়েকটি **স্বীকার্য্য** দেওয়া হইল :

(১) দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু একটি সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত করা যায়।

(২) কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে উভয়দিকে যতদূর ইচ্ছা বাড়াইতে পারা যায়।

(৩) কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

৪৭। প্রতিজ্ঞার প্রমাণের জন্য অনেকস্থলে নিম্নলিখিত অঙ্কনগুলিও প্রমাণ ব্যতীত করিতে দেওয়া হয় :

(১) যে কোন বহিঃস্থ বা অন্তঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সরল রেখার উপর লম্ব টানা যাইতে পারে।

---

* যন্ত্রগুলির ব্যবহার ষষ্ঠ মানে উত্তমরূপে শিক্ষা করিতে হয় বলিয়া এইস্থানে তাহার পুনরালোচনা করা হইল না। সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার অঙ্কন কার্য্যে এইগুলি ছাড়া অন্য কোন যন্ত্রের ব্যবহার অনুমোদিত নহে, ইহা শিক্ষার্থীদের বিশেষভাবে মনে রাখা কর্ত্তব্য। তবে, সম্পাদ্য ও উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রমাণের জন্য যে অঙ্কন দরকার তাহাতে চাঁদা (protractor), ত্রিকোণী (set-squares) ইত্যাদি ব্যবহার করা যাইতে পারে।

(২) কোন সীমাবদ্ধ সরল রেখাকে একটি বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা যাইতে পারে।

(৩) কোন কোণকে একটি সরল রেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা যাইতে পারে।

(৪) কোন একটি সরল রেখাতে ক্ষুদ্রতর আর একটি সরল রেখার সমান একটি অংশ চিহ্নিত করা যাইতে পারে।

(৫) কোন সরল রেখার যে কোন বিন্দুতে ঐ সরল রেখার সহিত নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ কোণ করিয়া একটি সরল রেখা টানা যাইতে পারে।

(৬) যে কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সরল রেখার সমান্তরাল* করিয়া একটি সরল রেখা টানা যাইতে পারে (৭৬—৭৭ অনু.)

এইরূপ আরও কয়েকটি অঙ্কন আছে, ঐগুলি যথাস্থানে বিবৃত হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। জ্যামিতির চিত্রগুলি বিশুদ্ধভাবে অঙ্কিত হওয়া আবশ্যক। শুদ্ধভাবে অঙ্কিত হইলে চিত্রগুলি প্রতিজ্ঞার প্রমাণকার্য্যে সাহায্য করে। অপরপক্ষে, অঙ্কন শুদ্ধ না হইলে উহা দ্বারা অনেক অসত্যকেও সত্য বলিয়া প্রমাণ করা যায়।

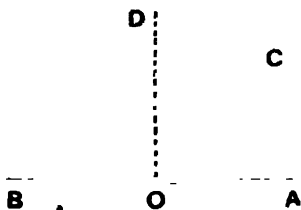
যেমন, ভুল অঙ্কন দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে 'স্থূলকোণ সমকোণের সমান' (২৮ অনুশীলনীর ৪৮ উদাহরণ দেখ), 'সব ত্রিভুজই সমবাহু' (৪৪ অনুশীলনীর ১২ উদাহরণ দেখ), ইত্যাদি।

* সমান্তরাল সরল রেখা কি, তাহা পরে বলা হইবে।

কোণ বিষয়ক উপপাদ্য

উপপাদ্য ১

সাধারণ নির্ব্বচন। এক সরল রেখা অন্য এক সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।*

[If a straight line stands on another straight line, the sum of the two adjacent angles so formed is equal to two right angles.]

বিশেষ নির্ব্বচন। মনে কর CO সরল রেখা AB সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হওয়াতে AOC ও COB সন্নিহিত কোণদ্বয় উৎপন্ন হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle AOC + \angle COB =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন। মনে কর OD সরল রেখা BAএর সহিত সমকোণ করিল।

প্রমাণ। $\angle AOC + \angle COB = \angle AOC + \angle COD + \angle DOB$;

আবার, $\angle AOD + \angle DOB = \angle AOC + \angle COD + \angle DOB$;

$\therefore$ $\angle AOC + \angle COB = \angle AOD + \angle DOB$, (১ স্বতঃসিদ্ধ)

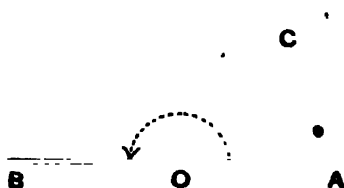
কিন্তু, $\angle AOD$ এবং $\angle DOB$এর প্রত্যেকটি এক সমকোণ;

$\therefore$ $\angle AOC + \angle COB =$ দুই সমকোণ। ই. উ. বি.

---

* ১ম উপপাদ্যের সাধারণ নির্ব্বচন এইরূপেও লেখা যায়:

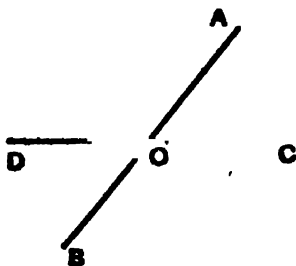
দুইটি সন্নিহিত কোণের বহির্ব্বাহুদ্বয় একই সরল রেখায় অবস্থিত হইলে, উক্ত কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

বিকল্প প্রমাণ (Alternative proof).

$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$,

কিন্তু, $\angle AOB$ কোণের OA ও OB বাহুদ্বয় একই সরল রেখায় অবস্থিত হওয়ায় $\angle AOB$ একটি সরল কোণ।

$\therefore$ $\angle AOC + \angle COB =$ এক সরল কোণ = দুই সমকোণ।

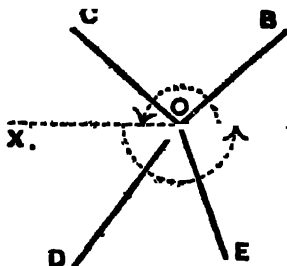
ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, উহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

এস্থলে, $\angle COA + \angle AOD + \angle DOB + \angle BOC = 4$ সমকোণ।

প্রমাণ। $\angle COA + \angle AOD = 2$ সমকোণ ;

এইরূপ, $\angle DOB + \angle BOC = 2$ সমকোণ ;

$\therefore$ $\angle COA + \angle AOD + \angle DOB + \angle BOC = 4$ সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। কয়েকটি সরল রেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে তাহাদের মধ্যে পর পর যে কোণগুলি থাকে, ঐ কোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

এস্থলে OA, OB, OC, OD, OE সরল রেখাগুলি O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে.

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 4$ সমকোণ।

AO সরল রেখাকে X বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

প্রমাণ। $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA$

$=$ AOX সরল কোণ $+$ XOA সরল কোণ, (চিত্র)

$= 2$ সমকোণ $+ 2$ সমকোণ $= 4$ সমকোণ।

৪৮। **পূরক কোণ** (Complementary angle)। দুই কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান হইলে উহাদের প্রত্যেকটিকে অন্যটির **পূরক কোণ** বলে।

১ম উপপাদ্যের চিত্রে, $\angle AOC + \angle COD =$ এক সমকোণ; সুতরাং, $\angle AOC$, $\angle COD$এর পূরক। এইরূপ, 40° এবং 50° কোণ দুইটিও পরস্পর পূরক; কারণ, $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ =$ এক সমকোণ।

৪৯। **সম্পূরক কোণ** (Supplementary angle)। দুই কোণেব সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইলে তাহাদেব প্রত্যেকটিকে অন্যটির **সম্পূরক কোণ** বলে।

১ম উপপাদ্যের চিত্রে, ∠AOC+∠COB=2 সমকোণ; সুতরাং, ∠AOC, ∠COBএব সম্পূবক।

এইরূপ, 30° এবং 150° কোণ দুইটিও পরস্পর সম্পূরক,

কারণ, 30°+150°=180°=2 সমকোণ।

১ম উদাহরণ। 30°এর পূবক কোণের পরিমাণ স্থির কর।

এস্থলে, 30° আর কত হইলে এক সমকোণ বা 90° হয়, ইহাই স্থিব করিতে হইবে।

∴ 30° এব পূবক কোণ=90°−30°=60°।

২য় উদাহরণ। 120° এর সম্পূরক কোণ কত স্থির কর।

এস্থলে, 120° আর কত হইলে দুই সমকোণ অর্থাৎ 180° হয়, ইহাই স্থির করিতে হইবে।

∴ 120° এব সম্পূবক কোণ=180°−120°=60°।

৫০। 90° হইতে কোন কোণেব পরিমাণ বিয়োগ কবিলেই ঐ কোণটির পূরক কোণের পবিমাণ পাওয়া যায়। কিন্তু 90° হইতে সমান সমান পরিমাণ বিয়োগ করিলে অবশিষ্টগুলিও পবস্পর সমান হইবে; সুতবাং,

সমান সমান কোণের বা একই কোণের পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

এইরূপে সিদ্ধান্ত কবা যায় যে,

সমান সমান কোণের বা একই কোণের সম্পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান।

অনুশীলনী ২

১। প্রথম উপপাদ্যের চিত্রে যদি $\angle AOC$ (ক) 45°, (খ) 60°, (গ) 75°, (ঘ) 90° হয়, প্রত্যেক স্থলে $\angle COB$এব পরিমাণ স্থির কর।

২। প্রথম উপপাদ্যের চিত্রে যদি $\angle COB$ (ক) 120°, (খ) 150°; (গ) 130°; (ঘ) 90° হয়, তাহা হইলে প্রত্যেক স্থলে $\angle AOC$এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

৩। প্রমাণ কর যে কোন কোণের এক বাহু বর্দ্ধিত করিলে যে সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, উহা পূর্ব্বোক্ত কোণটির সম্পূরক।

বহিঃকোণ ও অন্তঃকোণের অন্তর 120° হইলে, কোণ দুইটি কত ?

৪। প্রমাণ কর যে কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডকের অন্তর্ভূত কোণ এক সমকোণ।

৫। দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয় উহাদের একটি সমকোণ হইলে অন্যগুলিও এক একটি সমকোণ হইবে।

৬। দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের একটি (ক) 30°, (খ) 45°; (গ) 60°; প্রত্যেক স্থলে, অপর তিনটি কোণের প্রত্যেকটি কত হইবে স্থির কর।

৭। চারিটি সরল রেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে তাহাদের মধ্যে পর পর যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, উহাদের তিনটির পরিমাণ যথাক্রমে 30°, 120° এবং 140°, অবশিষ্ট কোণটির পরিমাণ কত ?

৮। ১ম উপপাদ্যের ২য় অনুসিদ্ধান্তের চিত্রে, $\angle AOB = 15^\circ$, $\angle BOC = 75^\circ$, $\angle DOE = 30^\circ$ এবং $\angle EOA = 85^\circ$। $\angle COD$ কত?

৯। নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর :

45°; 60°; 30°; $15^\circ\ 24'$, $32^\circ\ 18'\ 3''$; $50^\circ\ 29'\ 37''$।

১০। নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর :

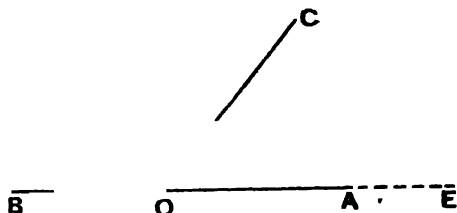
30°; 45°; 120°, 135°. 150°, $102^\circ\ 37'\ 45''$; $138^\circ\ 0'\ 57''$।

১১। দুইটি সম্পূরক কোণের একটি অন্যটির চারিগুণ; প্রত্যেকটি কত ?

১২। দুইটি পূরক কোণের একটি অপরটির পাঁচ গুণ, প্রত্যেকটি কত ?

উপপাদ্য ২

দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইলে উহাদের বহির্ব্বাহুদ্বয় একই সরল রেখায় থাকিবে।

[If the sum of two adjacent angles be equal to two right angles, their exterior arms are in the same straight line.]

মনে কর AOC ও COB এই দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে কোণ দুইটির বহির্ব্বাহু OA এবং OB একই সরল রেখায় থাকিবে।

প্রমাণ। যদি OA ও OB একই সরল রেখায় না থাকে, তবে মনে কর OE ও OB যেন একই সরল রেখায় অবস্থিত।

∴ ∠EOB = এক সরল কোণ = দুই সমকোণ।

কিন্তু, ∠AOB = ∠AOC + ∠COB = দুই সমকোণ (কল্পনা)

∴ ∠EOB = ∠AOB।

∴ OE এবং OA একই সরল রেখা। (১৯ অনু.)

কিন্তু, অঙ্কন অনুসারে OE ও OB একই সরল রেখায় অবস্থিত ;

∴ OA এবং OBও একই সরল রেখায় অবস্থিত।

ই. উ. বি.

৫১। বিপরীত প্রতিজ্ঞা। (Converse Propositions)। ১ম ও ২য় উপপাদ্যের নির্ব্বচন হইতে দেখা যায় যে

কল্পনা	সিদ্ধান্ত
১ম উপপাদ্যে— দুইটি সন্নিহিত কোণের বহির্ব্বাহুদ্বয় একই সরল রেখায় অবস্থিত।	দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।
২য় উপপাদ্যে— দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।	দুইটি সন্নিহিত কোণের বহির্ব্বাহুদ্বয় একই সরল রেখায় অবস্থিত।

অতএব, ১ম উপপাদ্যের কল্পনা ও সিদ্ধান্ত যথাক্রমে ২য় উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত ও কল্পনা।

একটি প্রতিজ্ঞার কল্পনা ও সিদ্ধান্ত যথাক্রমে অন্য একটি প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্ত ও কল্পনা হইলে, ঐ প্রতিজ্ঞা দুইটির একটিকে অপরটির **বিপরীত প্রতিজ্ঞা** বলে।

অতএব, ২য় উপপাদ্য ১ম উপপাদ্যের বিপরীত।*

অনুশীলনী ৩

১। দুইটি সন্নিহিত কোণের পরিমাণ যথাক্রমে (ক) $120°$, $60°$; (খ) $135°$, $45°$; (গ) $128° 1' 2''$, $51° 58' 58''$; প্রমাণ কর যে প্রত্যেক স্থলেই সন্নিহিত কোণ দুইটির বহির্ব্বাহুদ্বয় একই সরল রেখায় থাকিবে।

---

* মন্তব্য। শিক্ষার্থিগণ পরে দেখিবে যে কোন উপপাদ্য সত্য হইলেও উহার বিপরীত উপপাদ্য সত্য নাও হইতে পারে। যেমন, এক ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হইলে, তাহাদের কোণগুলিও যথাক্রমে পরস্পর সমান; কিন্তু ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা সত্য নহে; অর্থাৎ, একটির কোণগুলি যথাক্রমে অন্যটির কোণগুলির সমান হইলে তাহাদের বাহুগুলি ঐরূপ সমান নাও হইতে পারে।

২। চারি সরল রেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে পর পর যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, উহাদের প্রত্যেকটি এক সমকোণ হইলে, ঐ চারি সরল রেখা দুই সরল রেখায় পরিণত হইবে।

৩। একটি বিন্দু হইতে চারিটি সরল রেখা টানা হইলে উহাদের মধ্যে পর পর যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় যদি তাহারা পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ চারিটি সরল রেখা দুই সরল রেখায় পরিণত হইবে, এবং এই শেষোক্ত সরল রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে।

৪। AB সরল রেখার অন্তর্গত O বিন্দু হইতে উহার বিপরীত পার্শ্বে OC এবং OD সরল রেখা টানা হইল। যদি ∠BOC এবং ∠AOD পরস্পর সমান হয়, তবে O বিন্দু CD সরল রেখার উপর থাকিবে।

৫। দুইটি সন্নিহিত কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে, সন্নিহিত কোণ দুইটির বহির্বাহুদ্বয় একই সরল রেখায় থাকিবে।

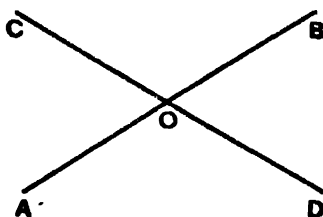
৬। দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিকোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের দ্বিখণ্ডকগুলি দুইটি সরল রেখায় পরিণত হইবে, এবং এই শেষোক্ত সরল রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হইবে। (ক. প্র., ১৯১৩)

৭। চারি সরল রেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের পর পর তিনটির পরিমাণ যথাক্রমে 150°, 30° ও 150°। প্রমাণ কর যে ঐ চারিটি সরল রেখা দুইটি সরল রেখায় পরিণত হইবে।

৮। একটি সরল রেখা O বিন্দুর চতুর্দ্দিকে ঘুরিতে ঘুরিতে OA সরল রেখার অবস্থান হইতে যথাক্রমে OB, OC ও OD সরল রেখাগুলির অবস্থান অতিক্রম করিয়া OE সরল রেখায় উপস্থিত হইল। ∠AOB, ∠BOC, ∠COD ও ∠DOE যথাক্রমে 30°, 45°, 105°, এবং 30° হইলে, প্রমাণ কর যে OD ও OA একই সরল রেখায় থাকিবে, এবং OB ও OE একই সরল রেখায় থাকিবে।

উপপাদ্য ৩

দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal.]

মনে কর AB ও CD সরল রেখাদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

(১) $\angle AOC = \angle BOD$,

(২) $\angle BOC = \angle AOD$।

প্রমাণ। ∵ AB ও OC সরল রেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

∴ সন্নিহিত $\angle AOC + \angle COB$ = দুই সমকোণ, (১ উপপাদ্য)

আবার, ∵ CD ও OB সরল রেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

∴ সন্নিহিত $\angle COB + \angle BOD$ = দুই সমকোণ, (১ উপপাদ্য)

∴ $\angle AOC + \angle COB = \angle COB + \angle BOD$।

এই সমান সমান সমষ্টি হইতে $\angle COB$ বাদ দিলে,

$\angle AOC = \angle BOD$।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BOC = \angle AOD$। ই. উ. বি.

অনুশীলনী ৪

১। ১৭ অনুচ্ছেদের সাহায্যে ৩য় উপপাদ্য প্রমাণ কব।

২। ৩য় উপপাদ্যেব চিত্রে $\angle AOC = 30^\circ$ হইলে অন্য তিনটি কোণেব প্রত্যেকটির পবিমাণ কত ?

৩। ৩য় উপপাদ্যের চিত্রে $\angle BOC = 105^\circ$ হইলে অন্য তিনটি কোণেব প্রত্যেকটি কত হইবে ?

৪। ৩য় উপপাদ্যের চিত্রে $\angle AOC$ এবং $\angle BOD$এব সমষ্টি 100° হইলে, প্রত্যেক কোণেব পরিমাণ কত হইবে ?

৫। ৩য় উপপাদ্যেব চিত্রে $\angle AOC + \angle COB + \angle BOD = 240^\circ$; প্রত্যেক কোণের পরিমাণ স্থির কর।

৬। AB ও CD সরল রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ কবিল। প্রমাণ কর যে $\angle AOC$এব দ্বিখণ্ডক O বিন্দুব দিকে বর্দ্ধিত হইলে উহা $\angle BOD$কে সমদ্বিখণ্ডিত কবিবে। (ক. প্র., ১৯১১)

ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ত্রিভুজ

৫২। সমতলের কোন অংশ এক বা বহু রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে তাহাকে **সামতলিক ক্ষেত্র** (Plane figure) বলে।

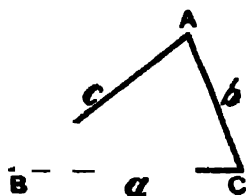
সামতলিক ক্ষেত্রের সীমারেখা সমূহের দৈর্ঘ্য-সমষ্টিকে ঐ ক্ষেত্রের **পরিসীমা** (Perimeter) বলে; এবং সীমা-রেখার অন্তর্গত স্থানের পরিমাণকে ঐ ক্ষেত্রের **কালি** বা **ক্ষেত্রফল** (Area) বলা হয়।

৫৩। কতকগুলি সরল রেখা দ্বারা বেষ্টিত সামতলিক ক্ষেত্রকে **ঋজুরেখ ক্ষেত্র** (Rectilineal figure) বলে।

যে সরল রেখাগুলি দ্বারা ক্ষেত্রটি সীমাবদ্ধ হয় তাহাদিগকে ঐ ক্ষেত্রের **বাহু** বা **ভুজ** (Side) বলে।

এক বা দুই সরল রেখা দ্বারা কোন স্থান সীমাবদ্ধ করা যায় না। সুতরাং, প্রত্যেক ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্ততঃ তিনটি বাহু থাকিবে।

নিম্নে কতকগুলি ঋজুরেখ ক্ষেত্রের উদাহরণ ও চিত্র দেওয়া হইল।

৫৪। **ত্রিভুজ** (Triangle)। তিনটি সরল রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ** (Triangle) বলে।

৫৫। **ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ**। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি ভুজ ও তিনটি কোণ। উপরের চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ; BC, CA, AB, এই সরল রেখা তিনটি ইহার বাহু; এবং ∠ABC, ∠BCA ও ∠CAB এই তিনটি ইহার কোণ। ত্রিভুজের তিন বাহু ও তিন কোণকে উহার ছয়টি **অঙ্গ** (Parts) বলা হয়।

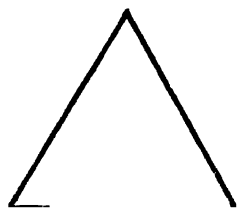
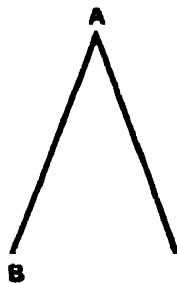
A, B ও C বিন্দুস্থ কোণগুলিকে সংক্ষেপে যথাক্রমে ∠A; ∠B, ∠C বলে, এবং তাহাদের বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে *a*, *b* ও *c* বলা হয়।

৫৬। **ত্রিভুজের শীর্ষ ও ভূমি**। ত্রিভুজের যে কোণ কৌণিক বিন্দুকে **শীর্ষ** (Vertex) বলে, এবং শীর্ষের বিপরীত বাহুকে **ভূমি** (Base) বলা হয়। যথা, ABC ত্রিভুজের A বিন্দুকে শীর্ষ ধরা হইলে, BC বাহু ভূমি হইবে।

সাধারণতঃ কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু নির্দ্দিষ্ট থাকিলে অবশিষ্ট বাহুটিকে ভূমি বলা হয়।

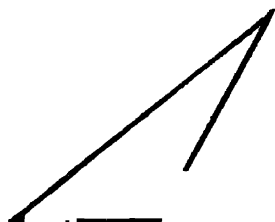
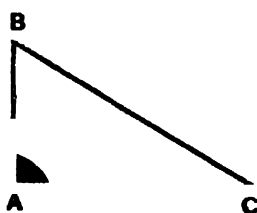
৫৭। **ছয় রকমের ত্রিভুজ**।

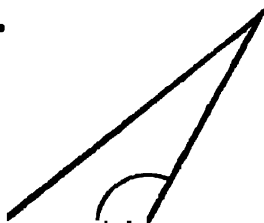
বাহু ও কোণ ভেদে ত্রিভুজ ছয় প্রকার: (১) সমবাহু ত্রিভুজ; (২) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ; (৩) বিষমভুজ ত্রিভুজ; (৪) সমকোণী ত্রিভুজ; (৫) স্থূলকোণী ত্রিভুজ, ও (৬) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।

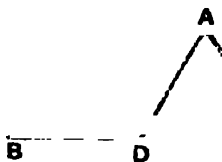
৫৮। যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর সমান তাহাকে **সমবাহু ত্রিভুজ** (Equilateral triangle) বলে।

৫৯। যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান তাহার নাম **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** (**Isosceles triangle**)।

৬০। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ, শিরঃকোণ ও ভূমি।

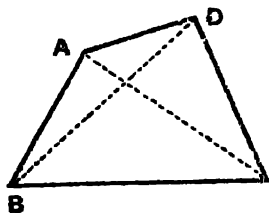
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটি যে বিন্দুতে মিলিত হয় তাহাকে ত্রিভুজের **শীর্ষ** (Vertex) বলে; এবং ঐ বাহু দুইটির অন্তর্ভূত কোণকে **শিরঃকোণ** (Vertical angle) বলা হয়। শীর্ষের বিপরীত বাহুর নাম **ভূমি** (Base)।

(৫৯ অনুচ্ছেদের চিত্রে) ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ইহার AB ও AC বাহু দুইটি সমান। A, শীর্ষ, ∠BAC, শিরঃকোণ; এবং BC, ভূমি।

৬১। যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর অসমান তাহার নাম **বিষমভুজ ত্রিভুজ** (Scalene triangle)।

৬২। যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহার নাম **সমকোণী ত্রিভুজ** (Right-angled triangle)।

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে। ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ; BC ইহার অতিভুজ।

৬৩। যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ তাহার নাম **স্থূলকোণী ত্রিভুজ** (Obtuse angled triangle)।

৬৪। যে ত্রিভুজের তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ তাহার নাম **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ** (Acute-angled triangle)।

৬৫। **মধ্যমা** (Median)। ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে উহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখাকে **মধ্যমা** বলে।

পার্শ্বের চিত্রে AD একটি মধ্যমা।

৬৬। চারি সরল রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রের নাম **চতুর্ভুজ** বা **চতুষ্কোণ** (Quadrilateral)।

চতুর্ভুজের চারিটি বাহু এবং চারিটি কোণ (চিত্র দেখ)।

যে সরল রেখা চতুর্ভুজের কোন দুইটি বিপরীত কৌণিক বিন্দুকে সংযুক্ত করে তাহার নাম **কর্ণ** (Diagonal)।

পার্শ্বের চিত্রে ABCD একটি চতুর্ভুজ ; এবং AC ও BDএর প্রত্যেকটি উহার কর্ণ।

৬৭। চারিটি অপেক্ষা অধিক সরল রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রের নাম **বহুভুজ** (Polygon)।

বহুভুজের বাহু সংখ্যা পাঁচ, ছয়, সাত ইত্যাদি হইলে উহাদিগকে

যথাক্রমে **পঞ্চভুজ** (Pentagon), **ষড়্ভুজ** (Hexagon), **সপ্তভুজ** (Heptagon), ইত্যাদি বলা হয়।

৬৮। যে বহুভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান তাহাকে **সমবাহু বহুভুজ** (Equilateral polygon) বলে, এবং যে বহুভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান ও কোণগুলিও পরস্পর সমান তাহাকে **সুষম বহুভুজ** (Regular polygon) বলে।

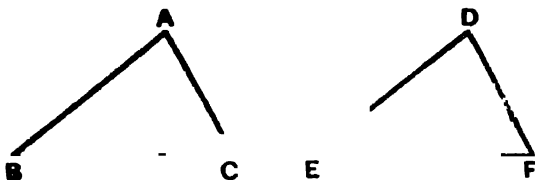
৬৯। **সর্ব্বসম ত্রিভুজ** (Congruent triangles)। একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর যথাযথ ভাবে স্থাপন করিলে যদি উহারা পরস্পর সর্ব্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সর্ব্বসম (Congruent) বলা হয়।

দুইটি সর্ব্বসম ত্রিভুজের একটির বাহু, কোণ এবং ক্ষেত্রফল যথাক্রমে অন্যটির বাহু, কোণ এবং ক্ষেত্রফলের সমান।

দুইটি সর্ব্বসম ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুকে **অনুরূপ বাহু** (Corresponding sides) এবং সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলিকে **অনুরূপ কোণ** (Corresponding angles) বলা হয়।

উপপাদ্য ৪

যদি কোন ত্রিভুজের দুইবাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অন্য এক ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম হইবে।

[If two triangles have two sides and the included angle of the one respectively equal to the two sides and the included angle of the other, the triangles are congruent.]

মনে কর ABC ত্রিভুজ এবং DEF ত্রিভুজের

AB = DE

AC = DF

এবং অন্তর্ভূত ∠BAC = অন্তর্ভূত ∠EDF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে △ABC এবং △DEF সর্ব্বসম।

প্রমাণ। △ABC কে △DEFএর উপর এরূপে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে, আর AC বাহুটি DF বাহুর দিকে থাকে।

এখন ∵ AB = DE, ∴ B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়িবে।

আবার, ∵ ∠BAC = ∠EDF, ∴ AC বাহু DF বাহুর উপর পড়িবে।

এবং ∵ AC = DF, ∴ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে।

এখন, B বিন্দু E বিন্দুর সহিত এবং C বিন্দু F বিন্দুর সহিত মিলিত হওয়ায়, BC বাহু EF বাহুর সহিত মিলিয়া যাইবে।

অর্থাৎ, Δ ABC, ΔDEFএর সহিত সর্ব্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

∴ ΔABC এবং ΔDEF সর্ব্বসম। ই. উ. বি.

মন্তব্য। এই উপপাদ্যের **কল্পনা** হইল —, ΔABC এবং ΔDEFএর AB = DE, AC = DF এবং ∠BAC = ∠EDF ; এবং **সিদ্ধান্ত** হইল—, ΔABC এবং ΔDEF সর্ব্বসম, অর্থাৎ ত্রিভুজ দুইটির অবশিষ্ট বাহু এবং কোণগুলিও নিম্নলিখিত ভাবে পরস্পর সমান :

(১) BC = EF ,

(২) ∠ABC = ∠DEF ,

(৩) ∠ACB = ∠DFE ।

অতএব সিদ্ধান্ত হইল যে, যে কোণ দুইটি সমান দেওয়া আছে তাহাদের বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান ; এবং সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ পরস্পর সমান।

অনুশীলনী ৫

১। AB সরল রেখার মধ্যবিন্দু O হইতে OCকে লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে (ক) ΔCAO এবং ΔCBO সর্ব্বসম,

(খ) OCএর যে কোন বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্ত্তী।

২। প্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক ভূমিকে লম্বরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB এবং AC বাহু দুইটি সমান। AB ও AC বাহুর উপর যথাক্রমে D ও E বিন্দু এরূপভাবে লওয়া হইল যে AD = AE। প্রমাণ কর যে CD = BE।

৪। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের AB এবং AC বাহু দুইটি সমান। প্রমাণ কর যে ∠BAC এর দ্বিখণ্ডকের যে কোন বিন্দু B ও C হইতে সমদূরবর্ত্তী।

৫। AB সরল রেখার মধ্যবিন্দু O দিয়া COD সরল রেখা টানা হইল। যদি OC এবং OD পরস্পর সমান হয়, তবে (ক) AOC এবং BOD ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম; (খ) BOC এবং AOD ত্রিভুজ দুইটিও সর্ব্বসম।

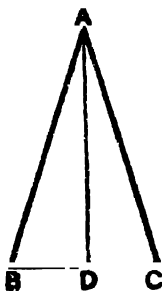
৬। AB সরল রেখার মধ্যবিন্দু O হইতে OCকে ABএর উপর লম্ব টানা হইল। P এবং Q, OCএর উপর যে কোন দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে △APQ এবং △BPQ সর্ব্বসম।

৭। ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু হইতে যথাক্রমে AB এবং ACএর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে OA = OB = OC।

৮। ABCDEF একটি সুষম ষড়্‌ভুজ। প্রমাণ কর যে ACE একটি সমবাহু ত্রিভুজ। (ক. প্র., ১৯১৮, ১৯২১)

উপপাদ্য ৫

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু পরস্পর সমান হইলে, সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুইটী পরস্পর সমান।

[If two sides of a triangle are equal, the angles opposite those sides are equal.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের AB = AC।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ABC = ∠ACB।

মনে কর AD সরল রেখা ∠BACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BCএর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ। ∵ △ABD এবং △ACD এর

AB = AC

AD = AD

এবং অন্তর্ভূত ∠BAD = অন্তর্ভূত ∠CAD। (অঙ্কন)

∴ △ABD এবং △ACD সর্ব্বসম। (উপপাদ্য ৪)

অতএব, ∠ABD = ∠ACD ;

অর্থাৎ, ∠ABC = ∠ACB। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণই পরস্পর সমান। (ক. প্র., ১৯২৩)

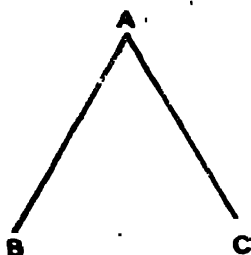
মনে কর, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

∵ AB = AC ,

∴ ∠B = ∠C।

আবার, ∵ BA = BC ;

∴ ∠A = ∠C ,

∴ ∠A = ∠B = ∠C।

অনুশীলনী ৬

১। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটিকে ভূমির দিকে বর্দ্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয় তাহারা পরস্পর সমান।

২। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি উভয় দিকে বর্দ্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয় তাহারা পরস্পর সমান।

৩। ABC এবং DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। BC উহাদের সাধারণ ভূমি হইলে, প্রমাণ কর যে ∠ABD = ∠ACD।

৪। কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে, তাহার বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে। (ক. প্র., ১৯২৩)

৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB এবং AC বাহু দুইটি সমান ; D, E ও F যথাক্রমে AB, BC ও CA বাহুর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে ED = EF এবং ∠ADE = ∠AFE। (ক. প্র., ১৯২০)

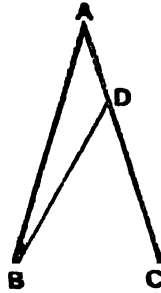
৬। দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ একই সাধারণ ভূমির উপর উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে প্রমাণ কর যে একটি সম্পূর্ণরূপে অন্যটির মধ্যে থাকিবে। (ক. প্র., ১৯১৪)

৭। সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি পরস্পর সমান।

৮। সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

উপপাদ্য ৬

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

[If two angles of a triangle are equal, the sides opposite those angles are equal.]

মনে কর △ABCএর ∠ABC = ∠ACB।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB = AC।

প্রমাণ। যদি AB ও AC পরস্পর সমান না হয় তবে উহাদের মধ্যে একটি অন্যটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

মনে কর AC, AB হইতে বড়।

AC হইতে ABএর সমান করিয়া CD অংশ কাটিয়া লও এবং B ও D সংযুক্ত কর।

এখন, △ABC এবং △BCDএর

AB = CD (অঙ্কন)

BC = BC

এবং অন্তর্ভূত ∠ABC = অন্তর্ভূত ∠ACB অর্থাৎ ∠DCB, (কল্পনা)

∴ △ABC এবং △BCD সর্ব্বসম ; (৪ উপপাদ্য)

অর্থাৎ △ABC, তাহার অংশ △BCDএর সমান।

কিন্তু ইহা অসম্ভব ; কারণ, কোন বস্তুর অংশ সেই বস্তুর সমান হইতে পারে না।

∴ AB ও AC অসমান নহে,

অর্থাৎ, AB = AC। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে উহার বাহুগুলি পরস্পর সমান হইবে।

দ্রষ্টব্য। ৬ষ্ঠ উপপাদ্য ৫ম উপপাদ্যের বিপরীত।

৭০। **অন্বয়ী প্রমাণ** (Direct proof) ও **ব্যতিরেকী প্রমাণ** (Indirect proof)।

৬ষ্ঠ উপপাদ্যের প্রমাণের রীতিকে **ব্যতিরেকী** প্রমাণ বলে। 'প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্তকে অস্বীকার করিলে সঙ্গে সঙ্গে কোন স্বতঃসিদ্ধ প্রমাণকেও অস্বীকার করিতে হয়, সুতরাং সিদ্ধান্তটি অস্বীকার করা যায় না, অর্থাৎ উহা সত্য', ব্যতিরেকী প্রমাণে এইরূপ যুক্তি অবলম্বিত হয়।

কিন্তু, ১ম হইতে ৫ম উপপাদ্যে যুক্তির সাহায্যে কল্পনা হইতে সাক্ষাৎ-ভাবে সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া গিয়াছে। এইরূপ প্রমাণ পদ্ধতিকে **অন্বয়ী প্রমাণ** বলে।

অনুশীলনী ৭

১। কোন ত্রিভুজের ভূমিকে উভয় দিকে বর্দ্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, উহারা পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। (ক. প্র., ১৯২৪)

২। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুকে তৃতীয় বাহুর দিকে বর্দ্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

৩। $\triangle$ABCএর $\angle$ABC এবং $\angle$ACBএর দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইলে যদি OB এবং OC সমান হয়, তবে $\triangle$ABC সমদ্বিবাহু হইবে।

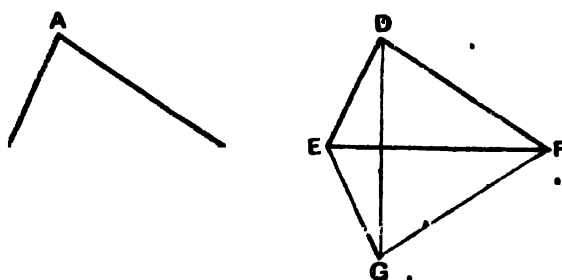
৪। যদি ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB এবং AC বাহু সমান হয়, তবে $\angle$ABC ও $\angle$ACBএর দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইলে OB এবং OC পরস্পর সমান হইবে।

৫। $\triangle$ABCএর BC বাহুকে উভয় দিকে বর্দ্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয়, তাহাদের দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইলে যদি OB এবং OC পরস্পর সমান হয়, তবে $\triangle$ABC সমদ্বিবাহু হইবে।

৬। ABCD চতুর্ভুজের AB এবং AD বাহু দুইটি পরস্পর সমান। যদি $\angle$ABC এবং $\angle$ADC সমান হয়, তবে $\triangle$BCD সমদ্বিবাহু হইবে।

উপপাদ্য ৭

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের তিন্ বাহু যথাক্রমে অন্যের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম হইবে।

[If two triangles have the three sides of the one respectively equal to the three sides of the other, the triangles are congruent.]

মনে কর △ABC এবং △DEFএর

AB = DE

AC = DF

BC = EF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে △ABC এবং △DEF সর্ব্বসম।

প্রমাণ। মনে কর BC বাহু ABC ত্রিভুজের অন্যান্য বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে। এখন, △ABCকে △DEFএর উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর, BC বাহু EF বাহুর উপর, এবং EF বাহুর যে পার্শ্বে D বিন্দু আছে, A বিন্দু যেন তাহার বিপরীত পার্শ্বে পড়ে।

এখন, ∵ BC = EF ; ∴ C, Fএর উপর পড়িবে।

মনে কর যেন △GEF, △ABC এর নূতন অবস্থান হইল।

D ও G বিন্দু সংযুক্ত কর।

$\because$ $\triangle$EDGএর ED = EG, $\therefore$ $\angle$EDG = $\angle$EGD, (৫ উপ.)

আবার, $\because$ $\triangle$FDGএর FD = FG, $\therefore$ $\angle$FDG = $\angle$FGD, (৫ উপ.)

$\therefore$ $\angle EDG + \angle FDG = \angle EGD + \angle FGD$

অর্থাৎ, $\angle EDF = \angle EGF = \angle BAC$।

এখন, $\triangle$ABC এবং $\triangle$DEFএর

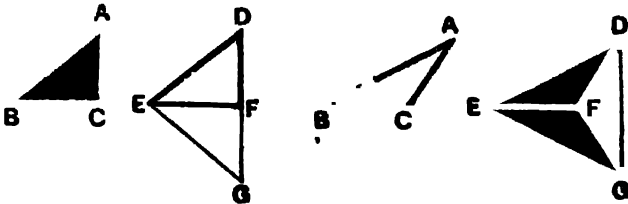
AB = DE

AC = DF

এবং অন্তর্ভূত $\angle$BAC = অন্তর্ভূত $\angle$EDF, (প্রমাণিত)

$\therefore$ $\triangle$ABC এবং $\triangle$DEF সর্বসম। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। $\triangle$AEC এবং $\triangle$ DEF সর্বসম হওয়াতে, প্রমাণিত হইল যে $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$; অর্থাৎ উভয় ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ পরস্পর সমান।

মন্তব্য। BC বাহু $\triangle$ABCএর অন্যান্য বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে DG সরল রেখা EFএর প্রান্ত বিন্দু দিয়া কিংবা EFএর বাহির দিয়াও যাইতে পারে, (নিম্নের চিত্র দেখ)।

BC বাহু সমকোণ কিংবা স্থূলকোণ সংলগ্ন হইলেই এরূপ অবস্থা ঘটিবে, কিন্তু উক্ত বাহুটি $\triangle$ABCএর বৃহত্তম বাহু হইলে প্রত্যেক স্থলেই অবস্থা ৭ম উপপাদ্যের চিত্রের অনুরূপ হইবে।

অনুশীলনী ৮

১। ৭ম উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে অঙ্কিত মধ্যমা ভূমির উপর লম্ব হইবে।

২। প্রমাণ কর যে রম্বসের* কর্ণ যে দুইটি কোণের মধ্য দিয়া যায়, উহা সেই কোণগুলির প্রত্যেকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (ক. প্র., ১৯১৬)

৩। যদি একই ভূমির উপর ও উহার বিপরীত পার্শ্বে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায়, তবে উহাদের শীর্ষদ্বয়-সংযোজক সরল রেখাটি ঐ ভূমিকে লম্বরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

৪। সমবাহু চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান।

৫। প্রমাণ কর যে রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (ক. প্র., ১৯৩৫)

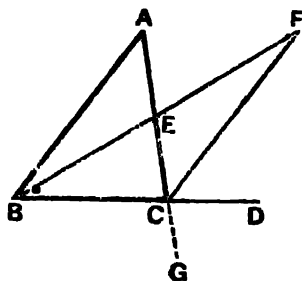
৬। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে, উহার বিপরীত কোণগুলিও পরস্পর সমান।

৭। দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিলে তাহাদের কেন্দ্র-সংযোজক সরল রেখা, AB সরল রেখাকে লম্বরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

* যে চতুর্ভুজের সকল বাহু সমান কিন্তু সকল কোণ সমান নহে, তাহার নাম রম্বস (Rhombus)।

উপপাদ্য ৮

ত্রিভুজের কোন বাহুকে বর্দ্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ* উৎপন্ন হয়, তাহা দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ দুইটির প্রত্যেকটি হইতে বৃহত্তর।

[If one side of a triangle is produced, the exterior angle is greater than either of the interior opposite angles.]

△ABCএর BC বাহু বর্দ্ধিত হওয়ায় বহিঃকোণ ACD উৎপন্ন হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ACD দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ BAC এবং ABCএর প্রত্যেকটি হইতে বৃহত্তর।

অঙ্কন। মনে কর E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু। BE সংযুক্ত কর এবং BEকে F বিন্দু পর্য্যন্ত এইরূপে বর্দ্ধিত কর যেন EF, BEএর সমান হয়। CF সংযুক্ত কর।

* △ABCএর BC বাহুকে D পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিলে, ∠ACDকে বহিঃকোণ (Exterior angle) বলে, এবং ত্রিভুজটির কোণত্রয়ের মধ্যে যে দুইটি বহিঃকোণের সন্নিহিত নহে, তাহাদের প্রত্যেকটিকে বহিঃকোণটির দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ (Interior opposite angle) বলা হয়। চিত্রে ∠BAC এবং ∠ABCএর প্রত্যেকটি ∠ACDএর দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ।

প্রমাণ। $\triangle AEB$ এবং $\triangle CEF$এর

$EA = EC$ (অঙ্কন)

$EB = EF$ (অঙ্কন)

এবং $\angle AEB =$ বিপ্রতীপ $\angle CEF$।

$\therefore$ $\triangle AEB$ এবং $\triangle CEF$ সর্ব্বসম।

$\therefore$ $\angle BAE = \angle ECF$।

কিন্তু $\angle ACD$, $\angle ECF$ হইতে বৃহত্তর।

$\therefore$ $\angle ACD$, $\angle BAE$ অর্থাৎ $\angle BAC$ হইতেও বৃহত্তর।

এইরূপে, ACকে G বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিয়া BC বাহুর মধ্যবিন্দুর সহিত A যুক্ত করিলে প্রমাণ করিতে পারা যাইবে যে

$\angle BCG$, $\angle ABC$ হইতে বৃহত্তর।

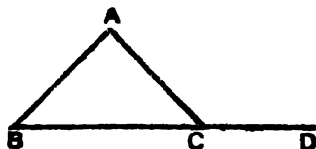
কিন্তু $\angle BCG =$ বিপ্রতীপ $\angle ACD$,

$\therefore$ $\angle ACD$, $\angle ABC$ হইতে বৃহত্তর।

$\therefore$ $\angle ACD$, $\angle BAC$ এবং $\angle ABC$এর প্রত্যেকটি হইতে বৃহত্তর।

ই, উ, বি,

অনুসিদ্ধান্ত ১। ত্রিভুজের যে কোন দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইতে ক্ষুদ্রতর।

যেমন, $\angle BAC$ এবং $\angle ACB$ এর সমষ্টি দুই সমকোণ হইতে ক্ষুদ্রতর।

কারণ $\angle BAC$, $\angle ACD$ হইতে ক্ষুদ্রতর।

$\therefore$ $\angle BAC$ এবং $\angle ACB$এর সমষ্টি, $\angle ACD$ এবং $\angle ACB$এর সমষ্টি অর্থাৎ দুই সমকোণ হইতে ক্ষুদ্রতর।

অনুসিদ্ধান্ত ২। প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্ততঃ দুইটি সূক্ষ্মকোণ আছে।

কারণ, কোণ তিনটির অন্ততঃ দুইটি সূক্ষ্মকোণ না হইলে, ঐ দুইটির প্রত্যেকটিই হয় সমকোণ না হয় স্থূলকোণ হইবে; তাহা হইলে, ঐ দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান অথবা দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; কিন্তু, ১ম অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে ইহা অসম্ভব। অতএব, ত্রিভুজের কোণত্রয়ের মধ্যে অন্ততঃ দুইটি সূক্ষ্মকোণ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। একটি বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন সরল রেখার উপর একটিমাত্র লম্ব টানা যায়।

কারণ, P বিন্দু হইতে ABএর উপর যদি PN ও PQ, এই দুইটি লম্ব টানা সম্ভব হয়, তবে ∠PNQ এবং ∠PQB প্রত্যেকটি এক এক সমকোণ হইবে।

P

A N Q B

যেহেতু, বহিঃকোণ PQB, ∠PNQ হইতে বৃহত্তর; ∴ এক সমকোণ অন্য এক সমকোণ হইতে বৃহত্তর। কিন্তু, ইহা অসম্ভব; কারণ, সকল সমকোণ পরস্পর সমান। অতএব, P হইতে ABএর উপর একের অধিক লম্ব টানা যাইতে পারে না।

অনুশীলনী ৯

১। ABC ত্রিভুজের ∠C সমকোণ। প্রমাণ কর যে ∠A এবং ∠Bএর প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ।

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণগুলি সূক্ষ্মকোণ।

(ক. প্র., ১৯২৬)

৩। প্রমাণ কর যে সমবাহু ত্রিভুজ সূক্ষ্মকোণী।

৪। কোন ত্রিভুজের এক বাহুকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ হইতে বৃহত্তর।

৫। $\triangle ABC$এর মধ্যে যে কোন বিন্দু O লইয়া প্রমাণ কর যে $\angle BOC > \angle BAC$; $\angle COA > \angle CBA$, এবং $\angle AOB > \angle ACB$।

৬। অঙ্কন সম্পূর্ণ করিয়া ৮ম উপপাদ্যের দ্বিতীয় অংশ প্রমাণ কর (অর্থাৎ $\angle BCG$, $\angle ABC$ হইতে বৃহত্তর প্রমাণ কর)।

(ক. প্র., ১৮৮০)

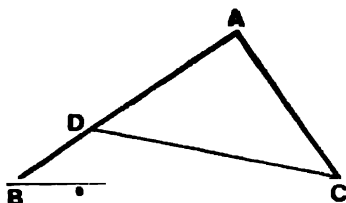
৭। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর অন্তর্গত কোন বিন্দুর সহিত A যুক্ত করিয়া ৮ম উপপাদ্যের ১ম অনুসিদ্ধান্ত প্রমাণ কর।

৮। প্রমাণ কর যে কোন সরল রেখার বহিঃস্থ একটি বিন্দু হইতে ঐ সরল রেখা পর্য্যন্ত তিনটি সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সরল রেখা টানা অসম্ভব।

(ক. প্র., ১৯৩২)

উপপাদ্য ৯

কোন্ ত্রিভুজের এক বাহু উহার অপর এক বাহু হইতে বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two sides of a triangle are unequal, the greater side has the greater angle opposite to it.]

মনে কর △ABCএর AB, AC হইতে বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ACB, ∠ABC হইতে বৃহত্তর।

অঙ্কন। মনে কর AB হইতে ACএর সমান করিয়া AD কাটিয়া লওয়া হইল। CD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। △ADCএর AD = AC (অঙ্কন)

∴ ∠ADC = ∠ACD, (৫ম উপপাদ্য)

কিন্তু বহিঃকোণ ADC, দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ DBC অর্থাৎ ABC হইতে বৃহত্তর ;

∴ ∠ACD, ∠ABC হইতে বৃহত্তর।

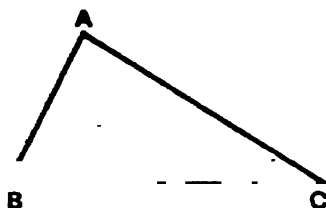
কিন্তু, ∠ACB, ∠ACD হইতে বৃহত্তর ;

∴ ∠ACB, ∠ABC হইতে বৃহত্তর। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণই ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণ।

উপপাদ্য ১০

কোন ত্রিভুজের এক কোণ উহার অপর এক কোণ হইতে বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তব হইবে।

[If two angles of a triangle are unequal, the greater angle has the greater side opposite to it.]

মনে কর ABC ত্রিভুজেব ∠ABC, ∠ACB হইতে বৃহত্তব।

প্রমাণ কবিতে হইবে যে AC, AB হইতে বৃহত্তব।

প্রমাণ। যদি AC, AB হইতে বৃহত্তর না হয় তবে AC, ABএর সমান, অথবা AB হইতে ক্ষুদ্রতব হইবে।

এখন যদি AC, ABএর সমান হয তাহা হইলে,

∠ABC = ∠ACB। (৫ম উপপাদ্য)

কিন্তু, কল্পনানুসারে ইহা হইতে পারে না।

আবার, AC, AB হইতে ক্ষুদ্রতর হইলে, ∠ABC, ∠ACB হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে; (৯ম উপপাদ্য)

কিন্তু কল্পনানুসারে ইহাও হইতে পারে না।

∴ AC, ABএর সমান অথবা AB হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না;

সুতরাং AC, AB হইতে বৃহত্তর। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণের বিপরীত বাহুই ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু।

দ্রষ্টব্য। ১০ম উপপাদ্য ৯ম উপপাদ্যের বিপরীত।

অনুশীলনী ১০

(উপপাদ্য ৯)

১। বিষমভুজ ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর অসমান।

২। ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতম।

$\triangle$ABCএর BC, CA এবং AB বাহুগুলি যথাক্রমে 7 ফুট, 5 ফুট ও 4 ফুট। ত্রিভুজের কোন্ কোণ ক্ষুদ্রতম এবং কোন্‌টি বৃহত্তম ?

৩। কোন ত্রিভুজের এক বাহু অপর এক বাহু হইতে ক্ষুদ্রতর হইলে, ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ সূক্ষ্মকোণ হইবে।

৪। কোন ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুসংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ।

৫। ABCD চতুর্ভুজের AD বাহু বৃহত্তম এবং BC বাহু ক্ষুদ্রতম। প্রমাণ কর যে $\angle C$, $\angle A$ হইতে বৃহত্তর। (ক. প্র., ১৯১৮)

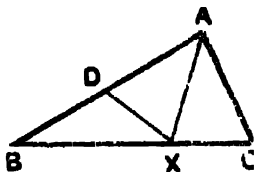
(উপপাদ্য ১০)

৬। প্রমাণ কর যে অতিভুজই সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু।

(ক. প্র., ১৯১৫)

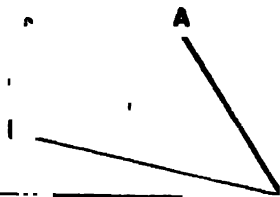
৭। ABC ত্রিভুজের AB বাহু $>$ AC বাহু; D, BC বাহুর অন্তর্গত যে কোন বিন্দু হইলে প্রমাণ কর যে AB $>$ AD।

৮। ABC ত্রিভুজের AC বাহু $>$ AB বাহু। যদি $\angle ABC$ এবং $\angle ACB$এর দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে OC $>$ OB।

৯। ABC ত্রিভুজের ∠BACএর দ্বিখণ্ডক BC বাহুকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি AB > AC হয়, তবে BX > CX হইবে।

[সঙ্কেত : AB হইতে ACএর সমান করিয়া AD কাটিয়া লও এবং DX সংযুক্ত কর। প্রমাণ কর যে △ADX এবং △ACX সর্ব্বসম, ∠BDX > ∠DXA, এবং ∠AXC > ∠ABC।

∴ ∠BDX > ∠ABC. সুতরাং, BX > DX অর্থাৎ CX।]

১০। প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (ক. প্র., ১৯৩৪)

[সঙ্কেত : AB হইতে ACএর সমান করিয়া AD কাটিয়া লও। সুতরাং, AB এবং AC বাহুর অন্তর = BD।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BD < BC।

CD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। বহিঃকোণ BDC > দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ ACD।

∵ AD = AC, ∴ ∠ACD = ∠ADC।

∴ ∠BDC > ∠ADC।

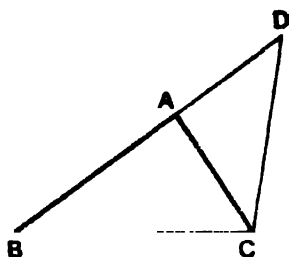
আবার, বহিঃকোণ ADC > দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ BCD;

সুতরাং, ∠BDC > ∠BCD

∴ BC > BD, অর্থাৎ BD < BC।]

উপপাদ্য ১১

কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

[Any two sides of a triangle are together greater than the third.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার যে কোন দুই বাহুর বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন। BA বাহুকে D পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর যেন AD ACএর সমান হয়। CD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\triangle ACD$এর $AD = AC$ (অঙ্কন)

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$; (উপপাদ্য ৫)

কিন্তু, $\angle BCD$, $\angle ACD$ হইতে বৃহত্তর,

$\therefore \angle BCD$, $\angle ADC$ অর্থাৎ $\angle BDC$ হইতে বৃহত্তর;

$\therefore$ BD, BC হইতে বৃহত্তর, (উপপাদ্য ১০)

কিন্তু, $BD = AB + AD = AB + AC$;

$\therefore$ $AB + AC$, BC হইতে বৃহত্তর।

এইরূপে, প্রমাণ করা যায় যে $BA + BC > AC$; এবং $CA + CB > AB$; অর্থাৎ, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

যথা, ৫৪ পৃষ্ঠার ১০ উদাহরণের চিত্রে $BD < BC$।

প্রমাণ। $AB < BC + AC$ (১১ উপপাদ্য)

অর্থাৎ, $BD + AD < BC + AC$

কিন্তু, $AD = AC$ (অঙ্কন); $\therefore BD < BC$।

অনুশীলনী ১১

১। ABC ত্রিভুজের BAC কোণের দ্বিখণ্ডক, BCকে X বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ কর যে $AB > BX$,

$AC > CX$

ইহা হইতে ১১শ উপপাদ্য প্রমাণ কর।

২। ABC ত্রিভুজের A বিন্দু হইতে BC বাহুর উপর লম্ব, BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে,

$AB > BD$,

$AC > CD$,

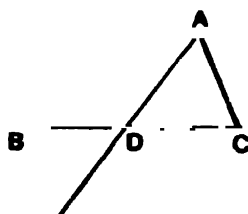
ইহা হইতে ১১শ উপপাদ্য প্রমাণ কর।

৩। প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের যে কোন তিন বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। (ক. প্র. ১৯১৩)

৪। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর। (ক. প্র., ১৯২৩)

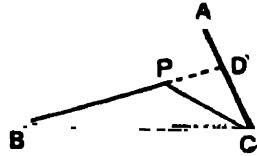
[সঙ্কেত : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর মধ্যমা AD অঙ্কিত কর। ADকে E পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন DE, ADএর সমান হয়। EC সংযুক্ত কর। এখন দেখাও যে

$EC + AC > AE$ অর্থাৎ $2\,AD$;

এবং $EC = AB$; $\therefore AB + AC > 2\,AD$]

৫। কোন ত্রিভুজের পরিসীমা (অর্থাৎ বাহুগুলির সমষ্টি) উহার মধ্যমা তিনটির সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু উহার অর্দ্ধ-পরিসীমা মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (ক. প্র., ১৮৮৬)

৬। ABC ত্রিভুজের ভিতর যে কোন বিন্দু P লইয়া প্রমাণ কর যে

$$AB+AC > PB+PC\text{।}$$

[সঙ্কেত : BPকে বর্দ্ধিত কর যেন উহা ACএর সহিত Dবিন্দুতে মিলিত হয়।

এখন, $AB+AD > BD$ অর্থাৎ $PB+PD$

এবং $PD+DC > PC$

$\therefore \quad AB+AD+PD+DC > PB+PD+PC$।

সমান সমান অংশ PD বিয়োগ করিলে,

$$AB+AD+DC > PB+PC,$$

অর্থাৎ, $AB+AC > PB+PC$।]

৭। ABC ত্রিভুজের ভিতর যে কোন বিন্দু P লইয়া প্রমাণ কর যে

$$AB+BC+CA > PA+PB+PC$$

এবং $PA+PB+PC > \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$।

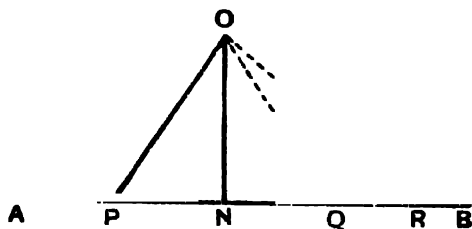
৮। একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর পরিমাণ 2 ও 3 ; প্রমাণ কর যে তৃতীয় বাহু 5এর চেয়ে ছোট কিন্তু 1এর চেয়ে বড় হইবে। (ক. প্র., ১৯২৫)

৯। কোন চতুর্ভুজের চারি বাহুর সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির দ্বিগুণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১০। কোন চতুর্ভুজের চারি বাহুর সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর। (ক. প্র., ১৯২০)

উপপাদ্য ১২

কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি সরল রেখা পর্য্যন্ত যতগুলি সরল রেখা টানা যায় তাহাদের মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

[Of all straight lines that can be drawn to a given straight line from a given point outside it, the perpendicular is the shortest.]

মনে কর AB একটি সরল রেখা এবং O একটি বহিঃস্থ বিন্দু। O হইতে ABএর উপর ON লম্ব, এবং অন্য যে কোন একটি সরল রেখা OP টানা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ON, OP হইতে ক্ষুদ্রতর।

প্রমাণ। $\triangle$ONPএর দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ OPN, বহিঃকোণ ONQ হইতে ক্ষুদ্রতর।

কিন্তু, সমকোণ ONQ = সমকোণ ONP ;

$\therefore$ $\angle$OPN, $\angle$ONP হইতে ক্ষুদ্রতর ,

$\therefore$ ON, OP হইতে ক্ষুদ্রতর। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। OP এবং OQ সরল রেখাদ্বয় N বিন্দু হইতে সমান দূরে ABএর সহিত মিলিত হইলে, অর্থাৎ NP = NQ হইলে,

OP = OQ।

প্রমাণ। $\triangle$ONP এবং $\triangle$ONQএর

NP = NQ

NO = NO

এবং $\angle$ONP = $\angle$ONQ,

$\therefore$ $\triangle$ONP এবং $\triangle$ONQ সর্ব্বসম ;

$\therefore$ OP = OQ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। OQ এবং OR সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে যেটি N বিন্দু হইতে অধিকতর দূরে ABএর সহিত মিলিত হয়, সেটি বৃহত্তর।

অর্থাৎ যদি NR, NQ হইতে বৃহত্তর হয় তবে OR, OQ হইতে বৃহত্তর হইবে।

প্রমাণ। $\because$ OR > ON.

$\therefore$ $\angle$ONR, $\angle$ORQ হইতে বৃহত্তর।

আবার, বহিঃকোণ $\angle$OQR. $\angle$ONR হইতে বৃহত্তর, (৮ম উপপাদ্য)

$\therefore$ $\angle$OQR, $\angle$ORQ হইতে বৃহত্তর;

$\therefore$ OR, OQ হইতে বৃহত্তর।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। O হইতে AB সরল রেখা পর্য্যন্ত যত সরল রেখা টানা যায়, তাহাদের ক্ষুদ্রতমটি ABএর উপর লম্ব হইবে।

মনে কর, ১২শ উপপাদ্যের চিত্রে ON সরল রেখাটিই ক্ষুদ্রতম, তাহা হইলে ONই ABএর উপর লম্ব হইবে। কারণ, যদি অন্য কোন সরল রেখা ABএর উপর লম্ব হয়, তবে উহা ON হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে (১২শ উপ.); কিন্তু ইহা কল্পনা বিরুদ্ধ। সুতরাং, ON ছাড়া অন্য কোন সরল রেখা ABএর উপর লম্ব হইতে পারে না ; অর্থাৎ ONই ABএর উপর লম্ব।

৭১। **তির্য্যক** (Oblique)। কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি সরল রেখা পর্য্যন্ত যতগুলি সরল রেখা টানা যায়, লম্ব ব্যতীত তাহাদের অপরগুলিকে **তির্য্যক** বলে।

১২শ উপপাদ্যের চিত্রে OP, OQ, OR তির্য্যক।

৭২। **সরল রেখা হইতে বিন্দুর দূরত্ব।** বিন্দু হইতে সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যই দূরত্ব (Distance)।

যথা, ১২শ উপপাদ্যের চিত্রে, AB হইতে Oএর দূরত্ব = ON।

অনুশীলনী ১২

১। ১২শ উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু।

২। ১২শ উপপাদ্যের চিত্রে যদি OR, OQ হইতে বড় হয়, প্রমাণ কর যে NR ও NQ হইতে বড় হইবে।

৩। ABC ত্রিভুজে AB > AC ; N, A হইতে BC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পদ (foot) হইলে, প্রমাণ কর যে BN > CN।

৪। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির অন্তর্ভাগ পর্য্যন্ত যতগুলি সরল রেখা টানা যায়, উহাদের প্রত্যেকটি ঐ ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের যে কোনটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৫। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি হইতে শীর্ষের দূরত্ব ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমান।

৬। সমবাহু ত্রিভুজের বাহু হইতে বিপরীত শীর্ষের দূরত্বগুলি পরস্পর সমান।

সমান্তরাল সরল রেখা

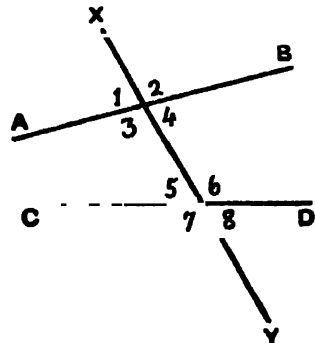
৭৩। যদি দুইটি সরল রেখা এক সমতলে থাকে এবং উভয়দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্দ্ধিত করিলেও পরস্পর মিলিত না হয়, তবে তাহাদিগকে **সমান্তরাল সরল রেখা** (Parallel straight lines) বলে।

পার্শ্বস্থ চিত্রের সরল রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

যদি ঘরের মেজের উপর পূর্ব্ব-পশ্চিম দিকে একটি সরল রেখা অঙ্কিত করা হয় এবং অন্য একটি সরল রেখা মেজের উপবিস্থ টেবিলের উপর উত্তর-দক্ষিণ দিকে টানা যায়, উভয় দিকে ইচ্ছামত বর্দ্ধিত করিলে এই সরল রেখা দুইটিও কখন মিলিত হইবে না ; কিন্তু, তাহা হইলেও ইহাদিগকে সমান্তরাল বলা যাইবে না ; কারণ, ইহারা এক সমতলে অবস্থিত নহে ; এইরূপ দুই সরল রেখাকে **নৈকতলীয়** (Skew) সরল রেখা বলে।

৭৪। **ভেদক** (Transversal)। একটি সরল রেখা দুই বা ততোধিক সরল রেখাকে ছেদ করিলে তাহাকে **ভেদক** বলে।

পার্শ্বের চিত্রে XY রেখাটি ভেদক ; ইহা AB এবং CD সরল রেখাদ্বয়কে ছেদ করিয়াছে।

X B 1 2 A 3 4 C 5 6 7 8 D Y

একটি সরল রেখা অপর দুই রেখাকে ছেদ করিলে মোটের উপর আটটি কোণ উৎপন্ন হয়। ইহাদের মধ্যে যে চারিটি শেষোক্ত সরল রেখাদ্বয়ের ভিতরে তাহাদিগকে **অন্তঃকোণ** (Interior angles) এবং যে চারিটি ঐ সরল রেখাদ্বয়ের

বাহিরে তাহাদিগকে **বহিঃকোণ** (Exterior angles) বলা হয়।

চিত্রে, 1, 2, 7 ও ৪ চিহ্নিত কোণগুলি বহিঃকোণ , এবং 3, 4, 5 এবং 6 চিহ্নিত কোণগুলি অন্তঃকোণ।

অন্তঃকোণ চারিটির মধ্যে 3 এবং 6 পরস্পর **একান্তর কোণ** (Alternate angles) : 4 এবং 5 ও পরস্পর একান্তর কোণ।

1 এবং 5 কোণকে পরস্পর **অনুরূপ কোণ** (Corresponding angles) বলে ; ইহাদের মধ্যে 1 কে **বহিঃকোণ** (Exterior angle) এবং 5 কে ভেদকের একই পার্শ্বস্থ **দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ** (Interior opposite angle on the same side of the transversal) বলা হয়।

এইরূপ, 2 ও 6 কোণদ্বয় পরস্পর অনুরূপ , 4 ও ৪ কোণদ্বয় পরস্পর অনুরূপ : 3 এবং 7 কোণদ্বয় পরস্পর অনুরূপ।

উপপাদ্য ১৩

একটি সরল রেখা অপর দুইটি সরল রেখাকে ছেদ করিলে যদি

(১) দুইটি একান্তর কোণ পরস্পর সমান হয়,

অথবা, (২) কোন বহিঃকোণ ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণের সমান হয়,

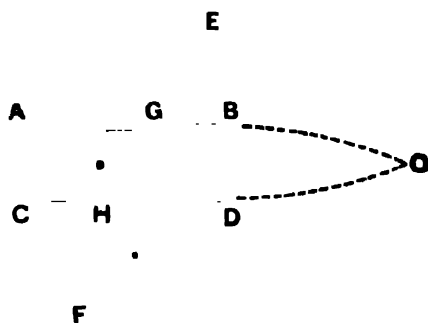
অথবা, (৩) ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দুইটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়,

তাহা হইলে শেষোক্ত সরল রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

[When a straight line cuts two other straight lines, if

(1) a pair of alternate angles are equal;

or, (2) an exterior angle is equal to the interior opposite angle on the same side of the cutting line;

or, (3) the sum of two interior angles on the same side of the cutting line is equal to two right angles, then the two straight lines are parallel.]

(১) মনে কর EF সরল রেখা AB এবং CDকে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করাতে, একান্তর কোণ AGH এবং GHD পরস্পর সমান হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল।

প্রমাণ। যদি AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল না হয় তাহা হইলে উহারা বর্দ্ধিত হইলে পরস্পর মিলিত হইবে।

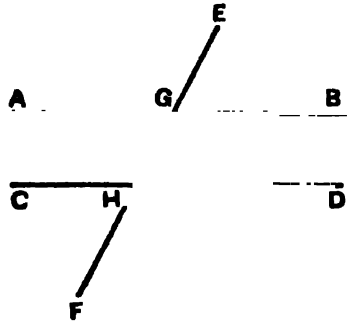
যদি সম্ভব হয়, মনে কর AB এবং CD, B এবং Dএর দিকে বর্দ্ধিত হওয়ায় O বিন্দুতে মিলিত হইল।

এখন, GOH একটি ত্রিভুজ, এবং উহার OG বাহু A বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে।

∴ বহিঃকোণ AGH, দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ GHO অর্থাৎ GHD হইতে বৃহত্তর; কিন্তু ইহা কল্পনা বিরুদ্ধ।

∴ AB এবং CD, B ও Dএর দিকে বর্দ্ধিত হইলে মিলিত হইতে পারে না। এইরূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে AB এবং CD, A ও Cএর দিকে বর্দ্ধিত হইলেও মিলিত হইতে পারে না।

∴ AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল।

(২) মনে কর EF, AB এবং CDকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করাতে বহিঃকোণ EGB, EFএর একই পার্শ্বস্থ দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ GHDএর সমান হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল।

প্রমাণ। $\angle EGB = \angle GHD$ (কল্পনা)

কিন্তু, $\angle EGB =$ বিপ্রতীপ $\angle AGH$,

∴ $\angle AGH = \angle GHD$;

কিন্তু, এই দুইটি একান্তর কোণ;

∴ AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল।

(৩) মনে কর EF, AB এবং CDকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করাতে EFএর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ BGH এবং GHDএর সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল।

প্রমাণ। $\angle BGH + \angle GHD =$ দুই সমকোণ; (কল্পনা)

কিন্তু, $\angle BGH + \angle AGH =$ দুই সমকোণ; (১ম উপপাদ্য)

∴ $\angle BGH + \angle AGH = \angle BGH + \angle GHD$;

এই সমান সমান সমষ্টি হইতে $\angle BGH$ বিয়োগ করিলে,

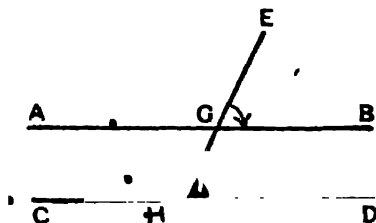
$\angle AGH = \angle GHD$;

কিন্তু, এই দুইটি একান্তর কোণ;

∴ AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল। ই. উ. বি.

সমান্তরাল সরল রেখার কয়েকটি বিশেষত্ব

৭৫। দুইটি একই দিকাভিমুখী সরল রেখা পরস্পর সমান্তরাল।

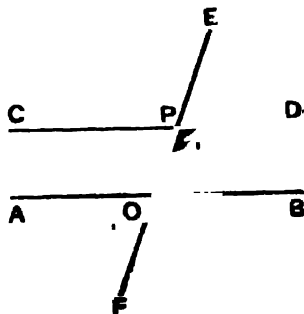
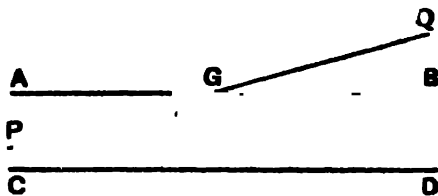
মনে কর CD সরল রেখাটিকে পূর্ব্বমুখী করিয়া টানা হইয়াছে। এখন উহার H বিন্দুকে স্থির রাখিয়া উহাকে তীর চিহ্নের দিকে কিছু পরিমাণ ঘুরাইয়া HGE অবস্থানে আন। এবার G বিন্দুকে স্থির

রাখিয়া CD সরল রেখাটিকে উহার HGE অবস্থান হইতে বিপরীত ভাবে ঠিক সমান পরিমাণ ঘুরাইলে উহা আবার পূর্ব্বমুখী হইবে। মনে কর এইভাবে ঘুরাইয়া উহাকে AB অবস্থানে আনা হইল।

এখন, $\because \angle EGB = \angle GHD$, (অঙ্কন)

$\therefore$ AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল (১৩ উপপাদ্য)

কিন্তু, এখন AB এবং CD প্রত্যেকটিই পূর্ব্বমুখী অর্থাৎ একই দিকে বিস্তৃত হইল ; সুতরাং, দুইটি সরল রেখা একই দিকে বিস্তৃত হইলে উহারা পরস্পর সমান্তরাল ; কিন্তু উহাদের অবস্থান পৃথক্।

৭৬। একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল অন্ততঃ একটি সরল রেখা টানা যায়।

একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু P হইতে AB সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া একটি সরল রেখা টানা যাইতে পারে। কারণ, ABকে ছেদ করিয়া যে কোন একটি সরল রেখা PO টান। এখন P বিন্দুকে স্থির রাখিয়া কোন একটি সরল রেখাকে PO অবস্থান হইতে তীর চিহ্নের দিকে ঘুরাইতে থাকিলে উহাকে নিশ্চয়ই এমন একটি অবস্থান CDতে আনা যাইবে যেখানে ∠DPO, একান্তর ∠AOPএর সমান হইবে, অর্থাৎ যেখানে CD, ABএর সমান্তরাল হইবে। অতএব, P বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল অন্ততঃ একটি সরল রেখা টানা যাইবে।

৭৭। **প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ।** দুইটি সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে উহারা প্রত্যেকে তৃতীয় একটি সরল রেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

তাৎপর্য্য। মনে কর AB এবং PQ, G বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। এখন যদি AB, CDএর সমান্তরাল হয় তবে প্লেফেয়ারের

স্বতঃসিদ্ধ মতে PQ, CDএর সমান্তরাল হইতে পারে না। অর্থাৎ, G বিন্দু দিয়া CDএর সমান্তরাল একাধিক সরল রেখা টানা যাইতে পারে না। কিন্তু পূর্ব্ব অনুচ্ছেদে প্রমাণ করা হইয়াছে যে G বিন্দু দিয়া CDএর সমান্তরাল অন্ততঃ একটি সরল রেখা টানা যায়। অতএব, প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ নিম্নলিখিত ভাবেও প্রকাশ করা যাইতে পারে:

একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল একটি মাত্র সরল রেখা টানা যাইতে পারে।

করিলে,

(১) দুইটি একান্তর কোণ পরস্পর সমান হইবে;

(২) যে কোন বহিঃকোণ ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণের সমান হইবে;

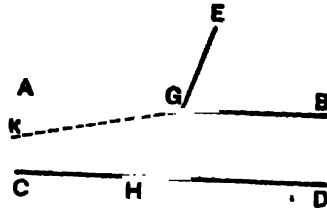
(৩) ভেদকের একই পার্শ্বস্থ দুইটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

[When a straight line cuts two parallel straight lines,

(1) a pair of alternate angles are equal;

(2) an exterior angle is equal to the interior opposite angle on the same side of the cutting line; and

(3) the sum of two interior angles on the same side of the cutting line is equal to two right angles.]

মনে কর EF, AB এবং CD সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

(১) ∠AGH = একান্তর ∠GHD,

(২) বহিঃকোণ EGB = দূরবর্তী অন্তঃকোণ GHD ;

(৩) EFএর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ GHD ও BGHএর সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

প্রমাণ। (১) যদি ∠AGH, ∠GHDএর সমান না হয়, মনে কর ∠KGH, ∠GHDএর সমান।

এখন, ∵ ∠KGH = একান্তর ∠GHD,

∴ KG, CDএর সমান্তরাল (১৩ উপপাদ্য)

কিন্তু ABও, CDএর সমান্তরাল ; (কল্পনা)

∴ KG এবং AB উভয়েই CDএর সমান্তরাল ; কিন্তু ইহা অসম্ভব ; কারণ, KG এবং AB পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করাতে উহারা উভয়েই CDএর সমান্তরাল হইতে পারে না। (প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ)

∴ ∠AGH এবং ∠GHD অসমান হইতে পারে না :

অর্থাৎ, ∠AGH = ∠GHD।

(২) $\angle EGB =$ বিপ্রতীপ $\angle AGH$।

কিন্তু, এইমাত্র প্রমাণিত হইয়াছে যে $\angle AGH = \angle GHD$;

$\therefore \quad \angle EGB = \angle GHD$।

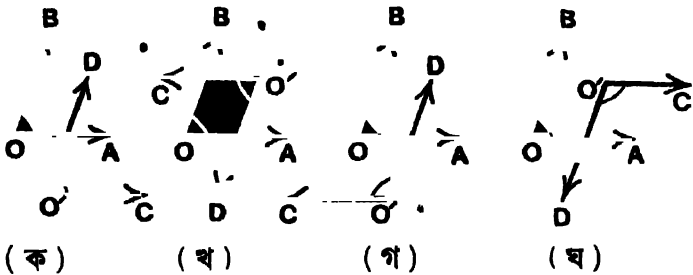
(৩) $\angle GHD = \angle EGB$ (প্রমাণিত)

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত $\angle BGH$ যোগ করিলে,

$\angle GHD + \angle BGH = \angle EGB + \angle BGH$

কিন্তু, $\angle EGB + \angle BGH =$ দুই সমকোণ; (১ উপপাদ্য)

$\therefore \quad \angle GHD + \angle BGH =$ দুই সমকোণ। ই. উ. বি.

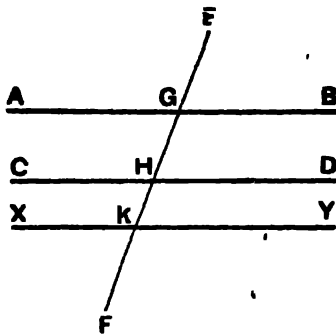
অনুসিদ্ধান্ত। যদি এক কোণের দুইবাহু যথাক্রমে অপর এক কোণের দুইবাহুর সমান্তরাল হয়, কোণ দুইটি পরস্পর সমান অথবা পরস্পর সম্পূরক হইবে।

$\angle AOB$এর OA এবং OB বাহু দুইটি যথাক্রমে $\angle CO'D$এর O′C ও O′Dএর সমান্তরাল।

(ক) ও (খ) চিত্রে, কোণ দুইটি পরস্পর সমান; কিন্তু (গ) ও (ঘ) চিত্রে কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।

মন্তব্য। ১৪ উপপাদ্য ১৩ উপপাদ্যের বিপরীত।

উপপাদ্য ১৫

যে সকল সরল রেখার প্রত্যেকটি একই সরল রেখার সমান্তরাল তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

[Straight lines which are parallel to the same straight line are parallel to one another.]

মনে কর, AB এবং CD এর প্রত্যেকটি XYএর সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

AB, CD এবং XYকে যথাক্রমে G, H ও K বিন্দুতে ছেদ করিয়া EF সরল রেখা অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। ∵ AB এবং XY পরস্পর সমান্তরাল,

∴ ∠AGH = একান্তর ∠GKY,

আবার, ∵ CD এবং XY পরস্পর সমান্তরাল,

∴ বহিঃকোণ GHD = দূরবর্তী অন্তঃকোণ GKY।

∴ ∠AGH = ∠GHD।

কিন্তু, ইহারা একান্তর কোণ;

∴ AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল। ই. উ. বি.

বিকল্প প্রমাণ।

A B

C D

X Y

যদি AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল না হয়, তবে AB এবং CD বর্দ্ধিত হইলে পরস্পর ছেদ করিবে।

∴ AB এবং CD উভয়েই XYএর সমান্তরাল হইতে পারে না, (প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ)

কিন্তু ইহা কল্পনা বিরুদ্ধ।

∴ AB এবং CD বর্দ্ধিত হইলেও মিলিত হইতে পারে না; অর্থাৎ AB এবং CD পরস্পর সমান্তরাল। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। ১৫ উপপাদ্য প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধের বিপরীত।

অনুশীলনী ১৩

১। একই সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বগুলি পরস্পর সমান্তরাল। (ক. প্র., ১৯১৭)

২। একই বাহুর বিপরীত পার্শ্বে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে তাহারা একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করিবে। (ক. প্র., ১৯১৬)

[যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাহার নাম **সামান্তরিক**।]

৩। এক সরল রেখা অপর দুই সরল রেখাকে ছেদ করিলে যদি দুইটি একান্তর কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে একান্তর কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

৪। যদি কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক এবং উহার বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান।

৫। একটি সরল রেখা দুই বা ততোধিক সমান্তরাল সরল রেখার অন্ততঃ একটির উপর লম্ব হইলে উহা অন্যগুলির উপরও লম্ব হইবে।

৬। সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান।

৭। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল করিয়া এক সরল রেখা টানিলে উহা ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটির সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

৮। ABC ত্রিভুজের ACB কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ABএর সমান্তরাল হইলে, $\triangle$ABC সমদ্বিবাহু হইবে।

৯। যদি কোন ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান্তরাল হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ কোণ হইবে।

(ক. প্র., ১৯৩২)

১০। $\angle$AOBএর বাহুদ্বয় যথাক্রমে $\angle$CO′Dএর বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল। যদি $\angle$AOB এবং $\angle$CO′D উভয়েই (ক) সূক্ষ্মকোণ; (খ) সমকোণ; (গ) স্থূলকোণ হয়; তবে প্রত্যেক স্থলেই কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

১১। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির সমান্তরাল একটি সরল রেখা অঙ্কিত করিলে ঐ সরল রেখাটি শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে।

১২। একটি সরল রেখা দুইটি সমান্তরাল সরল রেখাকে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে দুইটি অনুরূপ কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয়ও পরস্পর সমান্তরাল।

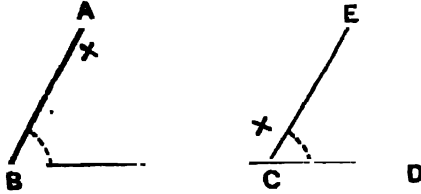
১৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুদ্বয় পরস্পর সমান। AB বাহুর X বিন্দু হইতে BCএর উপর অঙ্কিত লম্ব AC বাহুকে Y বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে $\triangle$AXY সমদ্বিবাহু।

১৪। ১৫ উপপাদ্যের চিত্রে $\angle AGH = 40^\circ$ হইলে, অন্যান্য কোণগুলি কত হইবে?

১৫। ব্যবহারিক জ্যামিতিতে সেট্‌স্কোয়ার দ্বারা যে সমান্তরাল সরল রেখা অঙ্কিত করা হয়, প্রমাণ কর যে উহারা সমান্তরাল।

উপপাদ্য ১৬

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

[The sum of the angles of a triangle is equal to two right angles.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA =$ দুই সমকোণ।

BC বাহুকে D পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর; এবং C বিন্দু হইতে BAএর সমান্তরাল করিয়া CE সরল রেখা টান।

প্রমাণ। CE ও BA পরস্পর সমান্তরাল, এবং AC উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে;

$\therefore$ $\angle ACE =$ একান্তর $\angle CAB$।

আবার, CE ও BA পরস্পর সমান্তরাল এবং BC উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে।

$\therefore$ বহিঃকোণ ECD = দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ ABC;

$\therefore$ $\angle ACE + \angle ECD = \angle CAB + \angle ABC$,

অর্থাৎ, বহিঃকোণ ACD, দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ CAB ও ABCএর সমষ্টির সমান।

উভয় পক্ষে $\angle BCA$ যোগ করিলে,

$\angle ACD + \angle BCA = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA$।

কিন্তু, $\angle ACD + \angle BCA =$ দুই সমকোণ; (১ উপপাদ্য)

$\therefore$ $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA =$ দুই সমকোণ। ই. উ. বি

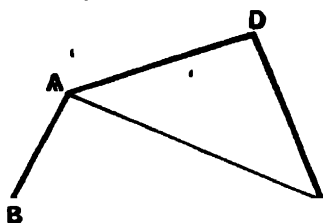
বিশেষ দ্রষ্টব্য। উল্লিখিত প্রমাণের মধ্যে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক সত্যও প্রমাণিত হইয়াছে।

ত্রিভুজের কোন বাহু বর্দ্ধিত হইলে যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহা দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

যথা, বহিঃকোণ ACD = ∠CAB + ∠ABC।

নিম্নলিখিত অনুসিদ্ধান্তগুলি ১৬শ উপপাদ্য হইতে সহজে অনুমান করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত ১। চতুর্ভুজের চারি কোণের সমষ্টি
=চারি সমকোণ।

AC কর্ণ ABCD চতুর্ভুজকে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়াছে; ABCDএর কোণগুলি একত্র যোগে এই দুই ত্রিভুজের কোণগুলির সমান অর্থাৎ (2+2) বা 4 সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। যদি এক ত্রিভুজের দুই কোণ যথাক্রমে অন্য এক ত্রিভুজের দুই কোণের সমান হয়, তবে তাহাদের তৃতীয় কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ = 60°।

কারণ, সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান; প্রত্যেক কোণ x হইলে, $x+x+x=2$ সমকোণ $=180^\circ$; অর্থাৎ, $3x=180^\circ$;

$$\therefore x=180^\circ \div 3=60^\circ।$$

অনুসিদ্ধান্ত ৪। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি পরস্পর পূরক।

কারণ, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = দুই সমকোণ।

∴ সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ছাড়া অন্য দুই কোণের সমষ্টি = দুই সমকোণ − এক সমকোণ = এক সমকোণ।

অর্থাৎ, উক্ত কোণ দুইটি প্রত্যেকেই সূক্ষ্মকোণ এবং পরস্পর পূরক।

১ম উদাহরণ। কোন ত্রিভুজের দুই কোণ যথাক্রমে 30° ও 75° হইলে, উহার তৃতীয় কোণটি কত?

তৃতীয় কোণটি x হইলে, $x+30^\circ+75^\circ=2$ সমকোণ $=180^\circ$;

অর্থাৎ, $x+105^\circ=180^\circ$; $\therefore \quad x=180^\circ-105^\circ=75^\circ$।

২য় উদাহরণ। কোন ত্রিভুজের দুই কোণ যথাক্রমে তৃতীয় কোণের দ্বিগুণ ও তিনগুণ হইলে, তৃতীয় কোণ কত স্থির কর।

মনে কর, তৃতীয় কোণ $=x$।

∴ অপর দুইটি কোণ যথাক্রমে $2x$ ও $3x$ হইবে।

$\therefore \quad x+2x+3x=180^\circ$ অর্থাৎ, $6x=180^\circ$,

$\therefore \quad x=180^\circ \div 6=30^\circ$।

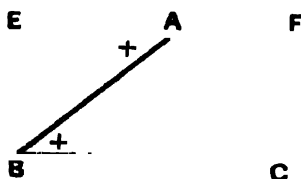
৩ উদাহরণ। কোন চতুর্ভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে 50°, 70° ও 120° হইলে চতুর্থটি কত স্থির কর।

মনে কর, চতুর্থ কোণ $=x$।

$\therefore \quad x+50^\circ+70^\circ+120^\circ=4$ সমকোণ $=4\times 90^\circ=360^\circ$;

অর্থাৎ, $x+240^\circ=360^\circ$; $\therefore \; x=360^\circ-240^\circ=120^\circ$।

অনুশীলনী ১৪

১। ত্রিভুজের শীর্ষ দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরল রেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

মনে কর EAF, BCএর সমান্তরাল।

প্রমাণ। ∵ EF ও BC পরস্পর সমান্তরাল,

∴ $\angle$ABC = একান্তর $\angle$EAB ;

এবং $\angle$BCA = একান্তর $\angle$FAC।

∴ $\angle$ABC + $\angle$BCA = $\angle$EAB + $\angle$FAC।

উভয় পক্ষে $\angle$CAB যোগ করিলে,

$\angle$ABC + $\angle$BCA + $\angle$CAB = $\angle$EAB + $\angle$FAC + $\angle$CAB

= সরল কোণ EAF = 2 সমকোণ।

২। কোণ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর বিপরীত শীর্ষ হইতে লম্ব টানিলে ত্রিভুজটি যে দুই ত্রিভুজে বিভক্ত হয়, উহাদের প্রত্যেকটি ঐ সমকোণী ত্রিভুজের সহিত এবং পরস্পরের সহিত সদৃশ কোণ হইবে।

[২য় অনুসিদ্ধান্ত দ্রষ্টব্য]

৩। ABC ত্রিভুজের $\angle$B এবং $\angle$Cএর দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইলে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$।

৪। কোন ত্রিভুজের এক কোণ অপর দুই কোণের সমষ্টির সমান হইলে ঐ কোণটি সমকোণ হইবে, কিন্তু উহা উক্ত সমষ্টি হইতে বৃহত্তর হইলে স্থূলকোণ, ও ক্ষুদ্রতর হইলে সূক্ষ্মকোণ হইবে।

৫। ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে যথাক্রমে একইরূপে বর্দ্ধিত করিলে যে তিনটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

৬। সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি অর্দ্ধ-সমকোণ বা $45°$।

৭। কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে

(ক) $60°, 30°$; (খ) $90°, 45°$; (গ) $45°, 45°$; (ঘ) $13° 28'$, $75° 37'$; প্রত্যেক স্থলে, তৃতীয় কোণটি কত হইবে স্থির কর।

৮। কোন চতুর্ভুজের তিন কোণ যথাক্রমে $85°, 92°$ ও $135°$; চতুর্থ কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

৯। কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটির সমষ্টি ও অন্তর যথাক্রমে $108°$ ও $12°$ হইলে, ত্রিভুজের কোণগুলি নির্ণয় কর। (ক. প্র., ১৯২৬)

১০। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ ভূমিসংলগ্ন কোণের যে কোন একটির তিনগুণ হইলে শিরঃকোণের পরিমাণ স্থির কর।

১১। ABC ত্রিভুজের $\angle B$ এবং $\angle C$এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইলে, $\angle BOC = \angle 90° - \frac{1}{2}\angle A$।

১২। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্ভূত কোণ ঐ ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্দ্ধেক হইবে। (ক. প্র., ১৯০৩)

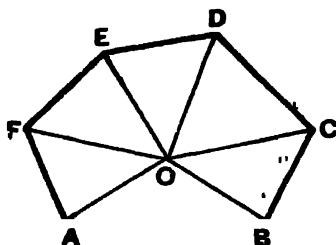
১৩। দুই সরল রেখা যথাক্রমে অপর দুই সরল রেখার উপর লম্ব হইলে শেষোক্ত সরল রেখা দুইটির অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণ পূর্ব্বোক্ত সরল রেখা দুইটির অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণের সমান হইবে। (পা. প্র., ১৯৩৩)

১৪। D, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু। যদি BD = CD = AD হয়, প্রমাণ কর যে $\angle BAC$ একটি সমকোণ।

১৫। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-বিন্দু ও অতিভুজের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখা অতিভুজের অর্দ্ধেক। (ক প্র., ১৮৮৪)

উপপাদ্য ১৬ (ক)

কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের যাবতীয় অন্তঃকোণ ও চারি সমকোণ একত্রযোগে ঐ ক্ষেত্রের বাহুসংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণের সমান।

[The interior angles of a rectilineal figure together with four right angles are equal to twice as many right angles as the figure has sides.]

মনে কর ABCDEF একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র, এবং ইহার বাহুর সংখ্যা $= n$।
প্রমাণ করিতে হইবে যে

ইহার যাবতীয় অন্তঃকোণ $+4$ সমকোণ $= 2n$ সমকোণ।

এই ক্ষেত্রের ভিতর যে কোন স্থানে O বিন্দু লও এবং ক্ষেত্রের প্রত্যেক শীর্ষ এবং O সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। যেহেতু ক্ষেত্রটি n-সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইয়াছে এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $= 2$ সমকোণ,

$\therefore$ এই n ত্রিভুজের যাবতীয় কোণ $= 2n$ সমকোণ।

কিন্তু, এই n ত্রিভুজের যাবতীয় কোণ

$=$ ঋজুরেখ ক্ষেত্রের যাবতীয় কোণ $+$ O বিন্দুতে উৎপন্ন যাবতীয় কোণ;

এখন, O বিন্দুতে উৎপন্ন যাবতীয় কোণ = 4 সমকোণ, (১ম উপ., ২য় অনু.)

∴ ঋজুরেখ ক্ষেত্রের যাবতীয় কোণ + 4 সমকোণ = $2n$ সমকোণ।

ই. উ. বি.

১ম মন্তব্য। n-বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের যাবতীয় কোণ $= (2n - 4)$ সমকোণ।

২য় মন্তব্য। ঋজুরেখ ক্ষেত্রটি সুষম হইলে এবং ইহার প্রত্যেক কোণ D হইলে,

n D $= (2n - 4)$ সমকোণ,

∴ $D = \frac{2n-4}{n}$ সমকোণ $= \frac{2n-4}{n} \times 90^\circ = 180^\circ - \frac{360}{n}$ ।

১ম উদাহরণ। কোন বহুভুজের বাহুসংখ্যা 12 হইলে তাহার অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত ?

নির্ণেয় সমষ্টি $= (2 \times 12 - 4)$ সমকোণ $= 20$ সমকোণ।

২য় উদাহরণ। কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি 28 সমকোণ হইলে তাহার বাহুসংখ্যা কত ?

বাহুসংখ্যা n হইলে,

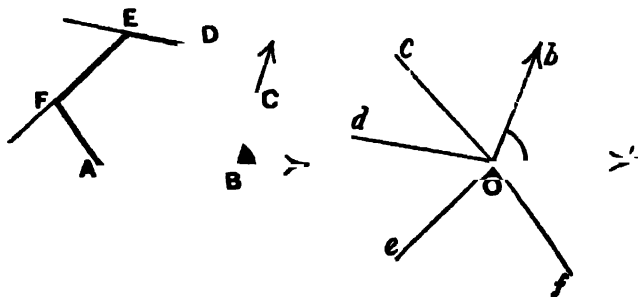
$28 + 4 = 2n$,

∴ $2n = 28 + 4 = 32$;

অর্থাৎ, $n = 32 \div 2 = 16$ ।

উপপাদ্য ১৬ (খ)

কোন প্রবৃদ্ধ-কোণশূন্য ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলিকে যথাক্রমে একইরূপে বর্দ্ধিত করিলে যে বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হয় উহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

[If the sides of a rectilineal figure having no re-entrant angle are produced in order, the sum of the exterior angles so formed is equal to four right angles.]

মনে কর ABCDEF একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র এবং ইহার বাহু সংখ্যা n। এখন, ইহার বাহুগুলিকে AB, BC, CD ইত্যাদি দিকে বর্দ্ধিত কর (চিত্র দেখ)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ।

প্রমাণ। প্রত্যেক শীর্ষে অন্তঃকোণ + বহিঃকোণ = 2 সমকোণ।

যেহেতু, এস্থলে n শীর্ষ আছে,

∴ সমস্ত অন্তঃকোণ + সমস্ত বহিঃকোণ = $2n$ সমকোণ;

কিন্তু, সমস্ত অন্তঃকোণ + 4 সমকোণ = $2n$ সমকোণ, [১৬ (ক) উপ.]

∴ সমস্ত অন্তঃকোণ + সমস্ত বহিঃকোণ = সমস্ত অন্তঃকোণ + 4 সমকোণ;

∴ সমস্ত বহিঃকোণের সমষ্টি = 4 সমকোণ। ই. উ. বি.

বিকল্প প্রমাণ

যে কোন বিন্দু O হইতে AB, BC, CD ইত্যাদি বাহুগুলির সমান্তরাল করিয়া, ঐ বাহুগুলি যে দিকে বর্দ্ধিত হইয়াছে সেই দিকে যথাক্রমে Oa, Ob, Oc, ইত্যাদি সরল রেখা টান।

প্রমাণ। $\because$ Oa এবং Ob যথাক্রমে AB এবং BCএর সমান্তরাল,

$\therefore$ AB ও BCএর অন্তর্ভূত বহিঃকোণ $= \angle aOb$।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে অন্যান্য বহিঃকোণগুলি যথাক্রমে $\angle bOc$, $\angle cOd$, ইত্যাদি কোণের সমান।

$\therefore$ বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ। ই. উ. বি.

১ম মন্তব্য। ১৬ (ক) ও ১৬ (খ) উপপাদ্য ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের পক্ষেও সত্য।

২য় মন্তব্য। একটি n বাহু বিশিষ্ট সুষম বহুভুজের কোন বাহু বর্দ্ধিত করিলে যদি উৎপন্ন বহিঃকোণের পরিমাণ D হয়, তবে

nD = 4 সমকোণ $= 360^\circ$; $\therefore$ D $= \dfrac{4 \text{ সমকোণ}}{n} = \dfrac{360^\circ}{n}$।

১ম উদাহরণ। কোন সুষম বহুভুজের (ক) প্রত্যেক বহিঃকোণ $= 40^\circ$, (খ) প্রত্যেক অন্তঃকোণ $= 120^\circ$; উহার বাহু সংখ্যা নির্ণয় কর।

বাহু সংখ্যা n হইলে,

(ক) $n \times 40^\circ = 360^\circ$; $\therefore n = 360^\circ \div 40^\circ = 9$।

(খ) প্রত্যেক অন্তঃকোণ $= 120^\circ$;

$\therefore$ প্রত্যেক বহিঃকোণ $= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$।

$\therefore$ $n \times 60^\circ = 360^\circ$; অর্থাৎ, $n = 360^\circ \div 60^\circ = 6$।

২য় উদাহরণ। সুষম ষড়্ভুজের প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

মনে কর প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণ = D।

$\therefore$ D $= 180^\circ - \dfrac{360^\circ}{6}$ [১৬ (ক) উপপাদ্য, ২য় মন্তব্য]

$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$।

অথবা এইরূপঃ সুষম ষড়্ভুজের কোন বাহু বাড়াইলে যদি বহিঃকোণের পরিমাণ D হয়, তবে

$D = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$; [১৬ (খ) উপপাদ্য, ২য় মন্তব্য]

কিন্তু, অন্তঃকোণ ও বহিঃকোণ পরস্পর সম্পূরক ;

$\therefore$ অন্তঃকোণ $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ।

অনুশীলনী ১৫

১। বহুভুজের বাহুসংখ্যা (ক) 5 , (খ) 7 , (গ) 18 হইলে, প্রত্যেক স্থলে অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত হইবে স্থির কর।

২। বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি (ক) 12 সমকোণ ; (খ) 900° ; (গ) 720° হইলে, প্রত্যেক স্থলে বহুভুজের বাহুসংখ্যা কত ?

৩। কোন্ ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি ও বহিঃকোণ সমূহের সমষ্টি পরস্পর সমান ?

৪। কোন সুষম বহুভুজের বাহু সংখ্যা 6, 8, 11, 15, 18 হইলে, প্রত্যেক স্থলে উহার যে কোন একটি অন্তঃকোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

৫। কোন সুষম বহুভুজের একটি কোণ, (ক) 162° , (খ) 135° ; (গ) $1\frac{1}{3}$ সমকোণ , (ঘ) 108° , প্রত্যেক স্থলে উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

৬। কোন সুষম বহুভুজের এক বাহু বর্দ্ধিত করিলে যদি বহিঃকোণ (ক) 60° , (খ) 72° , (গ) 18° , (ঘ) $\frac{1}{3}$ সমকোণ হয়, তবে প্রত্যেক স্থলে বহুভুজের বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

৭। কোন্ সুষম বহুভুজের প্রত্যেক কোণ দুই সমকোণের $\frac{9}{10}$এর সমান ? (ক. প্র , ১৮৭৭)

৮। কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ বহিঃকোণের পাঁচগুণ। বহুভুজের বাহুসংখ্যা কত ?

৯। কোন যুগ্মসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের কোণগুলি একান্তর ভাবে 138° ও 150° হইলে, উহার ভুজসংখ্যা কত ? (বো. প্র , ১৯২১)

১০। কোণ বিন্দুতে x সংখ্যক বিভিন্ন সুষম ঋজুরেখ ক্ষেত্রের এক এক কোণ পাশাপাশিভাবে পর পর সংলগ্ন হইল। যদি ক্ষেত্রগুলির বাহুসংখ্যা যথাক্রমে $a, b, c, d, \cdots$ হয় প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdots\cdots = \frac{x}{2} - 1$$

ব্যবহারিক জ্যামিতি

সম্পাদ্য

৭৮। যে প্রতিজ্ঞায় কোন অঙ্কন কার্য্য করিতে হয় তাহাকে **সম্পাদ্য** বলে। যথা, কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, কোণ, বা ত্রিভুজ ইত্যাদির সমান অপর সরল রেখা, কোণ, বা ত্রিভুজ ইত্যাদি অঙ্কন সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার আলোচ্য বিষয়। প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিতে যে সমস্ত অঙ্কন আবশ্যক তাহা স্বীকার করিয়াই লওয়া হয়, কিন্তু এস্থলে নির্দ্দিষ্ট অঙ্কনগুলি নিম্নলিখিত যন্ত্রের সাহায্যে নির্ভুলভাবে সম্পন্ন করিতে হইবে এবং সমস্ত অঙ্কনের রেখাগুলি স্পষ্টভাবে চিত্রে দেখাইতে হইবে।

সম্পাদ্যগুলির যাবতীয় অঙ্কন নিম্নলিখিত যন্ত্র তিনটির সাহায্যে করিতে হয়।*

(১) **মাপনী** (Ruler)। ইহার এক পার্শ্বে ইঞ্চি ও ইঞ্চির দশাংশ-গুলি এবং অন্য পার্শ্বে সেন্টিমিটর ও মিলিমিটর অঙ্কিত থাকে। মাপনী দ্বারা সরল রেখা অঙ্কন করা হয় এবং অঙ্কিত রেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(২) **কাঁটা কম্পাস** (Dividers)। ইহার সাহায্যে দুই বিন্দুর দূরত্ব বা কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার দৈর্ঘ্য মাপিতে পারা যায়, অথবা কোন সরল রেখা হইতে নির্দ্দিষ্ট পরিমাণ দৈর্ঘ্য কাটিয়া লওয়া যায়।

(৩) **পেন্সিল কম্পাস** (Pencil compasses)। ইহা দ্বারা বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

---

* শিক্ষার্থিগণ ৬ষ্ঠ মানে এই যন্ত্রগুলির ব্যবহার উত্তমরূপে শিক্ষা করিয়াছে বলিয়া এস্থলে তাহার পুনরালোচনা করা হইল না।

উল্লিখিত যন্ত্রগুলি ব্যতীত নিম্নলিখিত জিনিসগুলি প্রয়োজন :

(৪) দুইটি শক্ত পেন্সিল। একটি পেন্সিলের মুখ বাটালির মত চেপ্টা ও ধারাল করিয়া কাটিয়া লওয়া উচিত। ইহা দ্বারা রেখা ও বৃত্ত অঙ্কন করিবে। বিন্দু অঙ্কনের জন্য ব্যবহৃত পেন্সিলের মুখটি সূঁচের মত সরু হওয়া আবশ্যক।

(৫) রবার। অঙ্কন ভুল কিংবা খারাপ হইলে তাহা উঠাইয়া ফেলিবার জন্য একখণ্ড রবার সঙ্গে রাখা আবশ্যক।

৭৯। সম্পাদ্যের অঙ্কন কার্য্যে নিম্নলিখিত কথাগুলি মনে রাখা প্রয়োজন :

(১) অঙ্কিত চিত্র পরিষ্কার হওয়া আবশ্যক ; এজন্য, চিত্রটি যথাসম্ভব বড় করিয়া অঙ্কিত করিবে।

(২) যন্ত্রের সহিত নির্ভুলভাবে নির্দ্দিষ্ট অঙ্কন করিতে হইবে এবং যাবতীয় অঙ্কনের রেখাগুলি স্পষ্টভাবে চিত্রে দেখাইতে হইবে। তবে, চিত্রটি পরিষ্কার রাখিবার জন্য অঙ্কিত রেখা বা রেখাগুলির যে অংশ সম্পাদ্যের অঙ্কনের পক্ষে অত্যাবশ্যক নহে তাহা চিত্রে দেখাইবার প্রয়োজন নাই। যেমন, দুইটি চাপের ছেদ-বিন্দুটিই সম্পাদ্যের অঙ্কনের পক্ষে প্রয়োজন হইলে সম্পূর্ণ বৃত্ত অঙ্কন না করিয়া শুধু ছেদ বিন্দুর নিকটবর্ত্তী অংশটি চিত্রে দেখাইলেই হইবে।

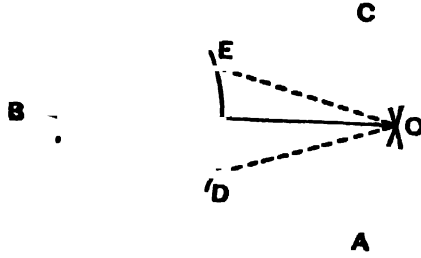
(৩) সম্পাদ্যের অঙ্কন কার্য্যের বিশুদ্ধতা প্রমাণ করিবার জন্য কোন রেখাদি অঙ্কনের দরকার হইলে উহাদিগকে ভিন্ন রীতিতে অঙ্কিত করিয়া দেখাইবে। সাধারণতঃ সম্পাদ্যের নির্দ্দিষ্ট অঙ্কনগুলি কিছু মোটা করিয়া অঙ্কিত করিতে হয় এবং প্রমাণার্থ অঙ্কনগুলি বিন্দু দ্বারা দেখাইতে হয়।

(৪) অঙ্কন ঠিক হইল কিনা মাপিয়া দেখিবে।

(৫) অঙ্কন কার্য্যে পরিচ্ছন্নতার উপর বিশেষ দৃষ্টি রাখিবে।

সম্পাদ্য ১

একটি নির্দ্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে

[To bisect a given angle.]

ABC একটি নিৰ্দ্দিষ্ট কোণ, ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। Bকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এমন একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা BA ও BCকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন D ও Eকে কেন্দ্র করিয়া DE ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এইরূপ দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। BO সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, BO সরল রেখা ∠ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। OD ও OE সংযুক্ত কর।

এখন, ODB ও OEB ত্রিভুজ দুইটির

BD = BE (একই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ বলিয়া)

OD = OE (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ বলিয়া)

OB = OB

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ ∠OBD = ∠OBE।

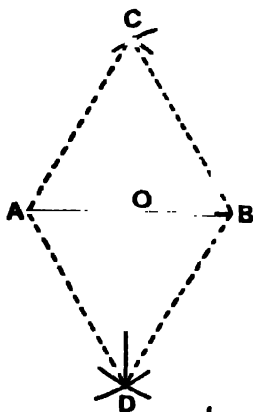
অর্থাৎ, BO সরল রেখা ∠ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। ই. স. বি.

১ম মন্তব্য। উল্লিখিত অঙ্কনে DEকে ব্যাসার্দ্ধ না লইয়া অন্য কোন ব্যাসার্দ্ধও লওযা চলে, কিন্তু উহা এইরূপ হওয়া চাই যেন চাপ দুইটি পরস্পরকে ছেদ করে। স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে ব্যাসার্দ্ধটি DEএর অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া দরকার।

২য় মন্তব্য। এই সম্পাদ্যের সাহায্যে যে কোন কোণকে চারি, আট, ষোল ইত্যাদি ভাগে ভাগ করা যায়।

সম্পাদ্য ২

একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given straight line.]

AB একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা।

ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। Aকে কেন্দ্র করিয়া ও ABএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া AB সরল রেখার উভয় দিকে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। আবার, Bকে কেন্দ্র করিয়া এবং একই ব্যাসার্দ্ধ লইয়া AB সরল রেখার উভয় দিকে এইরূপ দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পূর্ব্বোক্ত চাপ দুইটিকে

যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। CD সংযুক্ত কর; উহা যেন ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB সরল রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

প্রমাণ। AC, AD, BC ও BD সংযুক্ত কর।

ACD ও BCD ত্রিভুজ দুইটির

AC = BC (∵ প্রত্যেকে ABএর সমান)

AD = BD (∵ প্রত্যেকে ABএর সমান)

এবং CD = CD।

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

∴ ∠ACD = ∠BCD।

আবার, ACO ও BCO ত্রিভুজ দুইটির

AC = BC

CO = CO

এবং অন্তর্ভূত ∠ACO = অন্তর্ভূত ∠BCO, (প্রমাণিত)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম,

∴ AO = BO।

অর্থাৎ, AB সরল রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল। ই. স. বি.

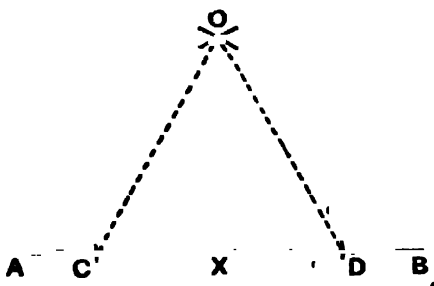
১ম মন্তব্য। উল্লিখিত অঙ্কনে CD সরল রেখা ABকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে, সুতরাং কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে লম্বরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া একটি সরল রেখা অঙ্কিত করিতে হইলেও অঙ্কন উল্লিখিতরূপ হইবে।

২য় মন্তব্য। উল্লিখিত ভাবে কোন সরল রেখাকে 4, 8, 16 ইত্যাদি সমান ভাগে ভাগ করা যায়।

দ্রষ্টব্য। উক্ত অঙ্কন কার্যে ABকে ব্যাসার্দ্ধ না লইয়া ABএর অর্দ্ধেক হইতে বৃহত্তর অন্য যে কোন ব্যাসার্দ্ধও লওয়া যাইতে পারে।

সম্পাদ্য ৩

একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরল রেখার উপর লম্ব টানিতে হইবে।

[To draw a perpendicular to a given straight line at a given point in it.]

মনে কর AB একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, ও X উহার একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু।

X হইতে AB সরল রেখার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে

প্রথম প্রণালী

অঙ্কন। X বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও যে কোন ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা ABকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, C ও Dকে কেন্দ্র করিয়া ও CDএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এইরূপ দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

OX সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে OX, AB সরল রেখার উপর X বিন্দুতে লম্ব হইবে।

প্রমাণ। OC ও OD সংযুক্ত কর।

OCX ও ODX ত্রিভুজ দুইটির

XC = XD (একই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ)

OC = OD (উভয়েই CDএর সমান)

এবং OX = OX।

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ ∠OXC = ∠OXD;

কিন্তু, ইহারা সন্নিহিত কোণ;

∴ OXC ও OXD কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি এক সমকোণ।

অর্থাৎ OX, AB সরল রেখার উপর X বিন্দুতে লম্ব।

ই. স. বি.

দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন। Xকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্দ্ধ লইয়া CDE চাপ অঙ্কিত কর। ইহা যেন ABকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন,

Cকে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব্বোক্ত ব্যাসার্দ্ধ লইয়া দ্বিতীয় একটি চাপ অঙ্কিত কর, ইহা যেন প্রথমোক্ত চাপকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। আবার, Dকে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব্বোক্ত ব্যাসার্দ্ধ লইয়া তৃতীয় একটি চাপ অঙ্কিত কর, ইহা যেন প্রথমোক্ত চাপকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব্বের ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করে।

XF সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে XF, AB সরল রেখার উপর X বিন্দুতে লম্ব হইবে।

প্রমাণ। DC, DX, DE, DF, EF এবং EX সংযুক্ত কর।

$\triangle CDX$ ও $\triangle EDX$এর বাহুগুলি সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ বলিয়া পরস্পর সমান।

$\therefore$ $\triangle CDX$ ও $\triangle EDX$, ইহারা এক এক একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

অতএব, $\angle CXD = 60^\circ$ এবং $\angle DXE = 60^\circ$।

আবার, $\triangle DXF$ ও $\triangle EXF$এর সর্ব্বসমতা দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে

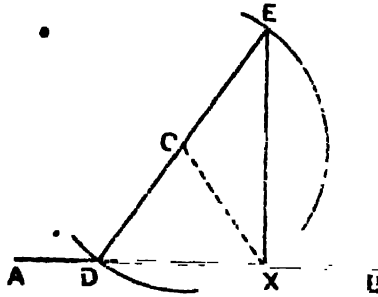
$$\angle DXF = \angle EXF,$$

$\therefore$ $\angle DXF = \frac{1}{2}\angle DXE = 30^\circ$, $(\because \angle DXE = 60^\circ)$

অতএব, $\angle CXF = \angle CXD + \angle DXF = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$।

অর্থাৎ XF, AB সরল রেখার উপর X বিন্দুতে লম্ব।

ই. স. বি.

তৃতীয় প্রণালী

অঙ্কন। AB সরল রেখার বাহিরে যে কোন বিন্দু C লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া ও CX ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; ইহা যেন AB কে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

DC-কে সংযুক্ত করিয়া এইরূপে বর্দ্ধিত কর যেন উহা অঙ্কিত বৃত্তের পরিধির সহিত E বিন্দুতে মিলিত হয়। এখন, EX সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে EX, AB-এর উপর X বিন্দুতে লম্ব হইবে।

প্রমাণ। CX সংযুক্ত কর।

$\because$ CX = CD, $\therefore$ $\angle$CXD = $\angle$CDX,

আবার, $\because$ CX = CE, $\therefore$ $\angle$CXE = $\angle$CEX।

$\therefore$ $\angle$CXD + $\angle$CXE = $\angle$CDX + $\angle$CEX।

অর্থাৎ, $\angle$DXE = $\angle$CDX + $\angle$CEX = বহিঃকোণ EXB।

কিন্তু, $\angle$DXE ও $\angle$EXB, ইহারা সন্নিহিত কোণ,

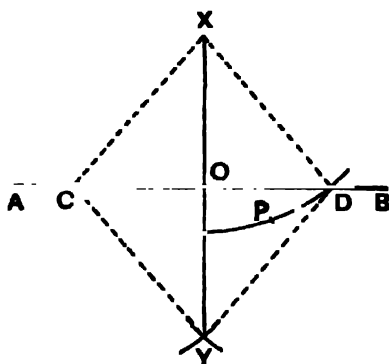
$\therefore$ $\angle$DXE ও $\angle$EXB-এর প্রত্যেকটি এক সমকোণ।

অর্থাৎ EX, AB-এর উপর X বিন্দুতে লম্ব। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। X বিন্দু AB-এর কোন প্রান্তের নিকট থাকিলে দ্বিতীয় ও তৃতীয় প্রণালীতে লম্ব অঙ্কিত করাই কার্য্যতঃ সুবিধাজনক।

সম্পাদ্য ৪

একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার বহিঃস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরল রেখার উপর লম্ব টানিতে হইবে।

[To draw a perpendicular to a given straight line from a given external point.]

AB একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, এবং X উহার বহিঃস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। X হইতে ABএর উপর লম্ব টানিতে হইবে।

প্রথম প্রণালী

অঙ্কন। X, ABএর যে পার্শ্বে অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে কোন একটি বিন্দু P লও এবং Xকে কেন্দ্র করিয়া ও XP ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর; উহা যেন ABকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। C ও Dকে কেন্দ্র করিয়া CXএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর; মনে কর উহারা ABএর যে পার্শ্বে X বিন্দু আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে Y বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়া XY সরল রেখা টান।

তাহা হইলে XO, ABএর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। CX, DX, CY ও DY সংযুক্ত কর।

CXY ও DXY ত্রিভুজ দুইটিব

CX = DX (অঙ্কন)

CY = DY (অঙ্কন)

এবং XY = XY ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ ∠CXO = ∠DXO।

আবাব, CXO ও DXO ত্রিভুজ দুইটিব

CX = DX

XO = XO

এবং অন্তর্ভূ‌র্ত ∠CXO = অন্তর্ভূ‌র্ত ∠DXO ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম

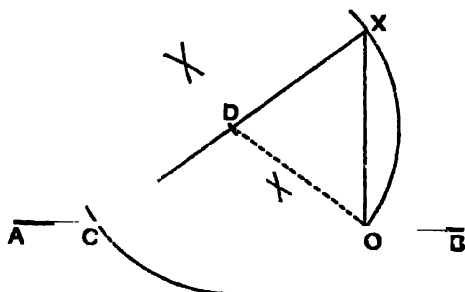
∴ ∠XOC = ∠XOD।

কিন্তু ইহাবা সন্নিহিত কোণ ;

∴ ইহাদেব প্রত্যেকটি এক সমকোণ।

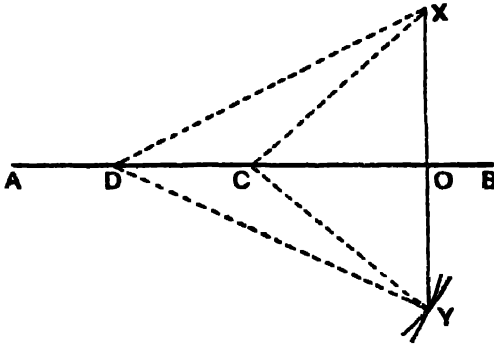
অর্থাৎ XO, ABএর উপর লম্ব।

ই. স. বি.

দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন। ABএর যে কোন বিন্দু C লও। XC সংযুক্ত কর এবং XCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর (২য় সম্পাদ্য)। এখন, D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং DC ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহা যেন ABকে C এবং O বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে XO, ABএর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। DO সংযুক্ত করিয়া, ৩য় সম্পাদ্যের তৃতীয় প্রণালীর প্রমাণের অনুরূপ ভাবে এস্থলেও প্রমাণ করা যায় যে $\angle$XOC একটি সমকোণ।

তৃতীয় প্রণালী

অঙ্কন। AB সরল রেখায় যে কোন দুইটি বিন্দু D ও C লও। C ও Dকে কেন্দ্র করিয়া এবং যথাক্রমে CX ও DX ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এইরূপ দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা X, ABএর যে পার্শ্বে আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে Y বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। XY সংযুক্ত কর, ইহা যেন ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, XO, ABএর উপর লম্ব হইবে।

প্রমাণ। ∵ CX = CY, DX = DY, DC = DC,

∴ XCD ও YCD ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম, (৭ম উপপাদ্য)।

∴ ∠XDO = ∠YDO।

এখন, DXO ও DYO ত্রিভুজ দুইটির

DX = DY, DO = DO এবং ∠XDO = ∠YDO,

সুতরাং, ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম হওয়াতে ∠DOX = ∠DOY;

কিন্তু, ইহারা সন্নিহিত কোণ;

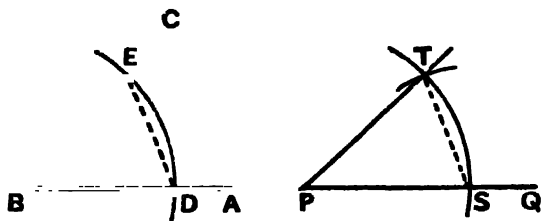
∴ ∠DOX একটি সমকোণ;

অর্থাৎ, XO, ABএর উপর লম্ব। ই. স বি.

মন্তব্য। ৪র্থ সম্পাদ্যের উল্লিখিত অঙ্কন তিনটিতে অঙ্কিত লম্বের পদ O, AB সরল রেখার বাহিরেও অবস্থিত হইতে পারে; ঐরূপ স্থলে ABকে আবশ্যক মত বাড়াইয়া লইবে।

সম্পাদ্য ৫

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে কোন নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[At a given point in a given straight line to make an angle equal to a given angle.]

ABC একটি নির্দ্দিষ্ট কোণ ; এবং P, PQ সরল রেখার একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু।

P বিন্দুতে PQ সরল রেখার সহিত ∠ABCএর সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। Bকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর ; উহা যেন BA ও BCকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

Pকে কেন্দ্র করিয়া BDএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর ; ইহা যেন PQকে S বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন Sকে কেন্দ্র করিয়া DEএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর ; মনে কর শেষোক্ত দুইটি চাপ পরস্পর T বিন্দুতে ছেদ করিল।

PT সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে ∠QPT, ∠ABCএর সমান হইবে।

প্রমাণ। DE ও ST সংযুক্ত কর।

TPS ও EBD ত্রিভুজ দুইটির

TP = EB (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ বলিয়া)

PS = BD (" " " " ")

ST = DE (অঙ্কন)

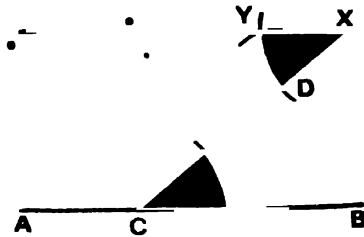
∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ ∠SPT = ∠DBE।

অর্থাৎ, ∠QPT, ∠ABCএর সমান। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ৬

একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল একটি সরল রেখা টানিতে হইবে।

[Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.]

AB একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, এবং X একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু।
X হইতে ABএর সমান্তরাল একটি সরল রেখা টানিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সরল রেখাতে যে কোন বিন্দু C লও এবং CX সংযুক্ত কর। এখন ৫ম সম্পাদ্য অনুসারে X বিন্দুতে XC সরল রেখার সহিত ∠BCXএর সমান করিয়া একান্তর ∠CXY অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে XY, ABএর সমান্তরাল হইবে।

প্রমাণ। ∵ ∠CXY = একান্তর ∠BCX ; (অঙ্কন)

∴ XY, ABএর সমান্তরাল। ই. স. বি.

অনুশীলনী ১৬

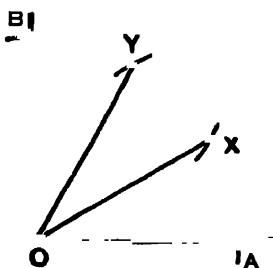
১। যে কোন একটি কোণ লও এবং উহাকে চারি সমান অংশে বিভক্ত কর।

২। একটি নির্দ্দিষ্ট কোণকে এইরূপ দুই অংশে ভাগ কর যেন এক অংশ অপর অংশের তিন গুণ হয়।

৩। একটি সরল রেখার কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে $60°$ ও $30°$ কোণ অঙ্কিত কর।

[একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে $60°$ কোণ উৎপন্ন হইবে]

৪। একটি নির্দ্দিষ্ট সমকোণকে সমান তিন ভাগে ভাগ কর।

[$\angle AOB$ একটি সমকোণ। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া, যে কোন ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এমন একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা OA ও OBকে যথাক্রমে

A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও পূর্ব্বোক্ত ব্যাসার্দ্ধ লইয়া পর পর আর দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর উহারা প্রথমোক্ত চাপকে যথাক্রমে Y ও X বিন্দুতে ছেদ করিল। OX এবং OY সংযুক্ত কর। তাহা হইলে OX ও OY, $\angle AOB$কে সমান তিন ভাগে ভাগ করিবে, কারণ, ΔAOY একটি সমবাহু ত্রিভুজ, $\therefore$ $\angle AOY = 60°$। $\therefore$ $\angle BOY = 90° - 60° = 30°$। এইরূপে, $\angle AOX = 30°$ এবং $\angle XOY = 90° - (30° + 30°) = 30°$।]

৫। একটি $45°$ কোণকে তিন সমান ভাগে ভাগ কর।

৬। নিম্নলিখিত কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর :

(১) যে কোন সরল কোণ ; (২) যে কোন প্রবৃদ্ধ কোণ।

৭। কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। দ্বিখণ্ডক-গুলি এক বিন্দুতে মিলিত হইল কি ?

৮। কোন নির্দ্দিষ্ট সবল রেখার মধ্যবিন্দুতে একটি লম্ব অঙ্কিত কব।

৯। কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর। এই দ্বিখণ্ডকগুলি এক বিন্দুতে মিলিত হইল কি ?

১০। একটি সরল রেখাকে এইরূপ দুই অংশে ভাগ কর যেন এক ভাগ অপব ভাগের তিন গুণ হয়।

১১। কোন নির্দ্দিষ্ট সবল রেখার এক প্রান্তে নিম্নলিখিত কোণগুলি অঙ্কিত কব।

(1) $45°$; (2) $135°$; (3) $120°$, (4) $150°$ ।

[সঙ্কেত। $45°$ = এক সমকোণেব $\frac{1}{2}$। $135°$, $45°$ এর সম্পূরক, ইত্যাদি।]

১২। কোন ত্রিভুজের শীর্ষগুলি হইতে বিপরীত বাহুব উপর লম্ব টান। লম্বগুলি এক বিন্দুতে মিলিত হইল কি ?

১৩। দুইটি নির্দ্দিষ্ট কোণেব সমষ্টির সমান একটি কোণ অঙ্কিত কর।

১৪। দুইটি নির্দ্দিষ্ট কোণেব অন্তরেব সমান একটি কোণ অঙ্কিত কর।

১৫। দুইটি নির্দ্দিষ্ট কোণ যথাক্রমে অপব দুই কোণেব সমষ্টি ও অন্তবেব সমান হইলে শেষোক্ত কোণ দুইটি অঙ্কিত কব।

[প্রদত্ত কোণ দুইটিব সমষ্টিব সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলেই বৃহত্তব কোণটি পাইবে।]

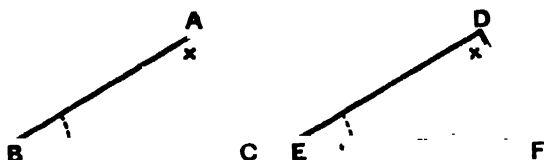
১৬। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল বেখার বহিঃস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরল রেখার সহিত নির্দ্দিষ্ট কোণ করিযা একটি সরল বেখা টান।

১৭। A কোন নদীর তীরস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বস্তু। যদি B ও C অপর তীরেব এমন দুইটি বিন্দু হয় যে $\angle ABC = 90°$, $\angle ACB = 30°$ এবং $BC = 720$ গজ, তাহা হইলে অঙ্কন দ্বারা নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

১৮। কোন স্থান হইতে দেখা গেল যে উত্তরদিকে অবস্থিত একটি পাহাড়ের চূড়া উত্তরদিকাভিমুখী সরল রেখার সহিত $45°$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে ; ঐ সরল রেখা-ক্রমে পাহাড়ের দিকে 840 গজ অগ্রসর হইলে যদি ঐরূপ কোণের পরিমাণ $60°$ হয়, তবে পাহাড়ের উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় কর।

উপপাদ্য ১৭

যদি এক ত্রিভুজের দুই কোণ যথাক্রমে অন্য এক ত্রিভুজের দুই কোণের সমান হয় এবং প্রথমোক্ত ত্রিভুজের একবাহু শেষোক্ত ত্রিভুজের অনুরূপ* বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম হইবে।

[If two triangles have two angles of the one respectively equal to two angles of the other, and also a side of the one equal to the corresponding side of the other, the triangles are congruent.]

মনে কর ABC ও DEF ত্রিভুজের

$\angle A = \angle D$,

$\angle B = \angle E$,

এবং BC বাহু = অনুরূপ বাহু EF।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্ব্বসম।

প্রমাণ। $\angle A + \angle B + \angle C =$ দুই সমকোণ,

এইরূপ, $\angle D + \angle E + \angle F =$ দুই সমকোণ

$\therefore \quad \angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$,

কিন্তু, $\angle A = \angle D$ এবং $\angle B = \angle E$

$\therefore \quad \angle C = \angle F$।

---

* সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলিকে অনুরূপ (Corresponding) বাহু বলে।

$\triangle$ABCকে $\triangle$DEFএর উপব এরূপে স্থাপন কব যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর, BC বাহু EF বাহুর উপব এবং A বিন্দু D বিন্দুব দিকে পড়ে।

এখন, $\because$ BC = EF, $\therefore$ C, Fএর উপব পড়িবে ;

এবং $\because$ $\angle$B = $\angle$E, $\therefore$ BA, EDএব উপব পড়িবে ;

আবাব, $\because$ $\angle$C = $\angle$F, $\therefore$ CA, FDএব উপর পড়িবে।

অতএব A বিন্দু, ED এবং FD এই উভয় সবল রেখাব উপব পড়াতে উহা ED ও FDএর সাধাবণ বিন্দু Dএব উপর পড়িবে।

$\therefore$ $\triangle$ABC, $\triangle$DEFএব সহিত সর্ব্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

অর্থাৎ, $\triangle$ABC ও $\triangle$DEF সর্ব্বসম। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এই উপপাদ্যেব কল্পনা হইল $\angle$A = $\angle$D, $\angle$B = $\angle$E, এবং BC = EF। সিদ্ধান্ত হইল $\triangle$ABC ও $\triangle$DEF সর্ব্বসম, স্থতবাং AB = DE, AC = DF। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে ত্রিভুজদ্বয়েব সমান সমান কোণেব বিপরীত বাহু পরস্পব সমান।

অনুশীলনী ১৭

১। যদি এক ত্রিভুজেব কোন কোণেব দ্বিখণ্ডক ঐ কোণের বিপবীত বাহুর উপর লম্ব হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

২। কোণেব দ্বিখণ্ডকেব যে কোনও বিন্দু ঐ কোণের বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্ত্তী। (ঢা. প্র., ১৯৩৫)

৩। কোন ত্রিভুজেব ভূমির উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্ত্তী।

৪। AB, একটি বৃত্তের জ্যা ; এবং O, ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। ABকে উভয় দিকে C ও D পর্য্যন্ত এরূপ ভাবে বর্দ্ধিত করা হইল যেন ∠DOA এবং ∠COB সমান হয়। প্রমাণ কর যে BC=AD। (বো. প্র., ১৯২৯)

[বৃত্তের পরিধির যে কোন দুই বিন্দুব সংযোজক সরল রেখাকে জ্যা বলে]।

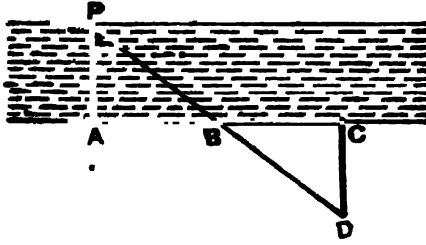
৫। কোন বৃত্তেব OA এবং OB ব্যাসার্দ্ধদ্বয় পরস্পব লম্ব। ঐ বৃত্তের যে কোনও ব্যাসের উপব A ও B হইতে যথাক্রমে AM ও BN লম্ব টানা হইল এবং লম্বদ্বয় ঐ ব্যাসকে M ও N বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে AM=ON। (বো. প্র.. ১৯২৮)

৬। এক সামান্তবিকের কোন কর্ণের মধ্যবিন্দু দিয়া যে কোন এক সরল বেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, সরল রেখাটি সামান্তরিকের যে কোন দুইটি বিপরীত বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে, উহা পূর্ব্বোক্ত বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (ক. প্র., ১৯৩১)

৭। AB, সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ ABCএর অতিভুজ। AD, BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। দেখাও যে, AC+CD=AB। (বো. প্র., ১৯২৩)

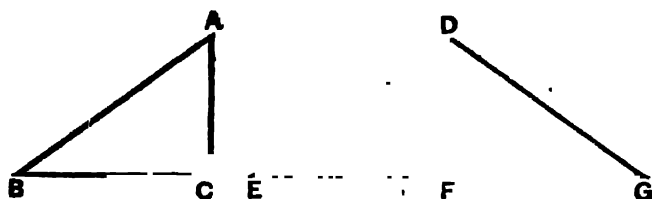
৮। ABC ত্রিভুজের ∠B এবং ∠C পরস্পর সমান। প্রমাণ কর যে এই দুই কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে পরস্পর সমান হইবে। (ক. প্র., ১৯২৯)

৯। দেখাও যে নদী পার না হইয়া নিম্নলিখিত উপায়ে উহার বিস্তার নির্ণয় করা যায়।

নদীতীরস্থ এমন এক বিন্দু Aতে দাঁড়াও যেন ঠিক সম্মুখে অপর তীরস্থ P বিন্দুতে কোন গাছ (বা অন্য কোন স্থির বস্তু) থাকে। এখন A হইতে

APএর সহিত লম্বভাবে কোন বিন্দু Bতে যাও এবং সেখানে একটি খুঁটি পুঁতিয়া একই রেখাক্রমে এরূপ এক বিন্দু Cতে যাও যেন BC ও AB সমান হয়। এবার C হইতে AC এর সহিত লম্বভাবে এমন এক বিন্দু D পর্য্যন্ত যাও যেন D হইতে পূর্ব্বোক্ত খুঁটি ও গাছ একই সরল রেখায় দেখায়। প্রমাণ কর যে CD নির্ণেয় বিস্তার APএর সমান।

উপপাদ্য ১৮

যদি এক সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর এক বাহু যথাক্রমে অন্য এক সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর এক বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম হইবে।

[If two right-angled triangles have their hypotenuses equal, and one side of the one equal to one side of the other, the triangles are congruent.]

মনে কর সমকোণী ত্রিভুজ ABC ও DEFএর

অতিভুজ AB = অতিভুজ DE,

এবং AC বাহু = DF বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে △ABC ও △DEF সর্ব্বসম।

প্রমাণ। △ABCকে △DEFএর উপর এরূপ ভাবে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর, AC বাহু DF বাহুর উপর, এবং E বিন্দু DFএর যে পার্শ্বে অবস্থিত B বিন্দু, তাহার বিপরীত পার্শ্বস্থ G বিন্দুর উপর পড়ে।

এখন, ∵ AC = DF ; ∴ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে।

অতএব △DGF, △ABCএর নূতন অবস্থান হইল।

∴ ∠DFE ও ∠DFG প্রত্যেকে এক সমকোণ।

∴ EFG একটি সরল রেখা ; এবং ইহা △DEGএর একটি বাহু।

এখন, $\triangle DEG$এর $DE = AB$ অর্থাৎ DG

$\therefore \angle DGF = \angle DEF$।

অতএব $\triangle DGF$ ও $\triangle DEF$এর

$\angle DFG = \angle DFE$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ)

$\angle DGF = \angle DEF$ (প্রমাণিত)

এবং $DF = DF$।

$\therefore \triangle DGF$ ও $\triangle DEF$ সর্ব্বসম,

অর্থাৎ, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্ব্বসম। ই. উ. বি.

অনুশীলনী ১৮

১। কোন ত্রিভুজের ভূমির মধ্যবিন্দু হইতে অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। (পা. প্র., ১৯৩৩)

২। যদি BAC কোণের AB এবং AC বাহু হইতে P বিন্দুর দূরত্ব সমান হয়, তবে P বিন্দু BAC কোণের দ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে।

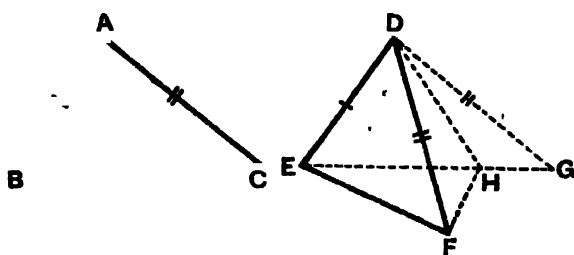
৩। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব, ভূমি ও শিরঃকোণ উভয়কেই সমদ্বিখণ্ডিত করে। (ক. প্র., ১৯৩৩)

৪। একটি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে উহার যে কোন জ্যার উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৫। একটি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে AB ও CD জ্যাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি পরস্পর সমান। প্রমাণ কর যে $AB = CD$।

উপপাদ্য ১৯*

যদি এক ত্রিভুজের দুইবাহু যথাক্রমে অন্য এক ত্রিভুজের দুইবাহুর সমান হয়, কিন্তু উহাদের অন্তর্ভূত কোণদ্বয় অসমান হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজের কোণ বৃহত্তর তাহার ভূমিও বৃহত্তর হইবে।

[If two triangles have two sides of the one respectively equal to two sides of the other, but the included angle be unequal, then the base of the one which has the greater angle is greater than the base of the other.]

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$এর

$AB = DE$

$AC = DF$

এবং $\angle A$, $\angle D$ হইতে বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BC, EF হইতে বৃহত্তর।

প্রমাণ। $\triangle ABC$কে $\triangle DEF$এর উপর এরূপে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে।

$\because AB = DE, \quad \therefore B$, Eএর উপর পড়িবে।

মনে কর DG ও EG যথাক্রমে AC ও BCএর নূতন অবস্থান।

এখন, ∵ ∠A, ∠D হইতে বৃহত্তর, ∴ DG, ∠EDFএর বাহিরে পড়িবে।

∠FDGকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া DH টান। DH যেন EGএর সহিত H বিন্দুতে মিলিত হইল। FH সংযুক্ত কর।

এখন, △DFH ও △DGHএর

DF = DG

DH = DH

এবং ∠HDF = ∠HDG।

∴ △DFH ও △DGH সর্ব্বসম।

∴ HF = HG।

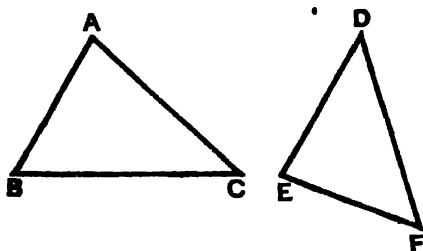
কিন্তু, EH + HF, EF হইতে বৃহত্তর,

∴ EH + HG, EF হইতে বৃহত্তর;

∴ EG অর্থাৎ BC, EF হইতে বৃহত্তর। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ১৯ (ক)*

যদি এক ত্রিভুজের দুইবাহু যথাক্রমে অন্য এক ত্রিভুজের দুইবাহুর সমান হয়, কিন্তু একটির ভূমি অন্যটির ভূমি হইতে বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজের ভূমি বৃহত্তর তাহার দুইবাহুর অন্তর্ভূত কোণ অন্যটির দুই বাহুর অন্তর্ভূত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If two sides of one triangle be respectively equal to two sides of another, but the bases be unequal, then the triangle which has the greater base has the greater angle opposite to it.]

মনে কর $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর

$AB = DE$

$AC = DF$

এবং BC, EF হইতে বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle A$, $\angle D$ হইতে বৃহত্তর।

প্রমাণ। যদি $\angle A$, $\angle D$ হইতে বৃহত্তর না হয, তাহা হইলে $\angle A$, $\angle D$এর সমান, কিংবা $\angle D$ হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে,

কিন্তু যদি $\angle A$, $\angle D$এর সমান হয়, তাহা হইলে $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ সর্ব্বসম হইবে এবং BC, EF-এর সমান হইবে, (৪ উপপাদ্য)

কিন্তু, ইহা কল্পনা বিরুদ্ধ ;

$\therefore$ $\angle A$, $\angle D$এর সমান হইতে পারে না।

আর যদি $\angle A$, $\angle D$ হইতে ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে BC, EF হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে। (১৯ উপপাদ্য)

কিন্তু ইহা কল্পনা বিরুদ্ধ।

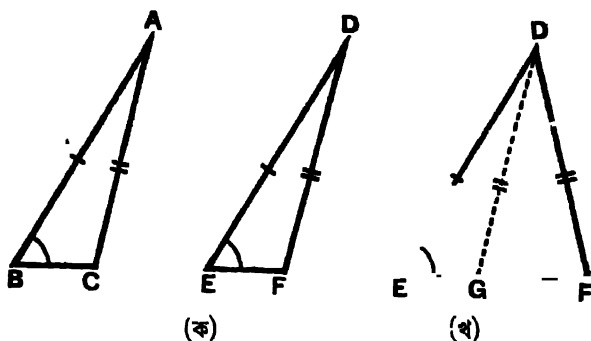
অতএব $\angle A$, $\angle D$ হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

$\therefore$ $\angle A$, $\angle D$ হইতে বৃহত্তর। ই. উ. দি.

উপপাদ্য ২০*

যদি কোন ত্রিভুজের দুইবাহু যথাক্রমে অন্য এক ত্রিভুজের দুইবাহুর সমান হয় এবং যে কোন দুইটি সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয়ও পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে অপর দুইটি সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় (১) পরস্পর সমান, অথবা (২) পরস্পর সম্পূরক হইবে ; এবং প্রথমস্থলে ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম হইবে।

[If two triangles have two sides of the one respectively equal to two sides of the other, and also the angles opposite one pair of equal sides equal, then the angles opposite the other pair of equal sides are either equal or supplementary ; and in the former case, the triangles are congruent.]

(ক) (খ)

মনে কর $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$এর

$AB = DE$

$AC = DF$

এবং $\angle B = \angle E$।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, হয় (১) $\angle C = \angle F$ এবং $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্ব্বসম ; না হয় (২) $\angle C + \angle F =$ দুই সমকোণ।

প্রমাণ। BC, EFএর হয়, সমান, না হয় সমান নহে।

(১) মনে কর $BC = EF$, [(ক) চিত্র]।

এখন, $\because AB = DE, AC = DF$, এবং $BC = EF$;

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্ব্বসম (৭ উপপাদ্য)

এবং $\angle C = \angle F$।

(২) যদি BC, EFএর সমান না হয় [(খ) চিত্র], মনে কর ইহাদের মধ্যে EF বৃহত্তর। EF হইতে BCএর সমান EG অংশ কাটিয়া লও ও DG সংযুক্ত কর।

এখন, $\because AB = DE, BC = EG$, এবং $\angle B = \angle E$;

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEG$ সর্ব্বসম। (৪র্থ উপপাদ্য)

$\therefore \quad \angle C = \angle DGE$; এবং $AC = DG$ ।

কিন্তু, $AC = DF$; $\quad \therefore DG = DF$;

$\therefore \quad \angle F = \angle DGF$;

$\angle C + \angle F = \angle DGE + \angle DGF =$ দুই সমকোণ ।

ই. উ. বি.

১ম মন্তব্য। প্রদত্ত কোণের বিপরীত বাহু AC, AB হইতে (কাজেই DF, DE হইতে) বৃহত্তর হইলে $\angle C$ ও $\angle F$ উভয়েই সূক্ষ্মকোণ হইবে (৮ ও ৯ উপ.)। অতএব, উহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ হইতে পারে না।

$\therefore$ এস্থলে $\angle C = \angle F$ হইবে, এবং ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম হইবে।

অতএব, যদি এক ত্রিভুজের দুইবাহু এবং উহাদের বৃহত্তরটির বিপরীত কোণ যথাক্রমে অন্য এক ত্রিভুজের দুইবাহু এবং উহাদের বৃহত্তরটির বিপরীত কোণের সমান হয় তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম হইবে।

২য় মন্তব্য। ১৮শ উপপাদ্য ২০শ উপপাদ্যেরই একটি বিশেষ স্থল (particular case)।

কারণ, ১৮শ উপপাদ্যে এক ত্রিভুজের দুইবাহু অন্য এক ত্রিভুজের দুই-বাহুর সমান এবং বৃহত্তর বাহুর (অতিভুজের) বিপরীত কোণদ্বয় সমকোণ বলিয়া পরস্পর সমান হওয়ায় ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

৮০। ত্রিভুজের সর্ব্বসমতা ও ত্রিভুজ অঙ্কন।

৪র্থ, ৭ম, ১৭শ, ১৮শ ও ২০শ উপপাদ্যে দুই ত্রিভুজের সর্ব্বসমতা বিচার করা হইয়াছে, এবং দেখা গিয়াছে যে যদি এক ত্রিভুজের তিন বাহু ও তিন কোণ, এই ছয় অঙ্গের মধ্যে কোন তিনটি নিম্নলিখিত ভাবে অন্য এক ত্রিভুজের বাহু ও কোণের অনুরূপ তিনটির সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বতোভাবে সমান হইয়া থাকে :

(১) দুইবাহু ও অন্তর্ভূত কোণ (উপপাদ্য ৪)

(২) তিনবাহু (উপপাদ্য ৭)

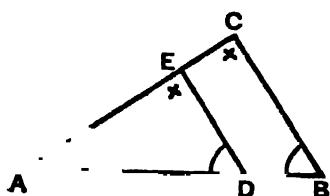
(৩) দুইকোণ ও এক অনুরূপ বাহু (উপপাদ্য ১৭)

(৪) দুই বাহু এবং উহাদেব বৃহত্তবটির বিপবীত কোণ।

কিন্তু, দুই ত্রিভুজের তিনটি অংশ নিম্নলিখিতভাবে সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম নাও হইতে পাবে।

(১) দুই বাহু ও উহাদের ক্ষুদ্রতবটির বিপরীত কোণ

[২০ উপপাদ্যের (খ) চিত্র দেখ]

(২) তিনকোণ।

যেমন, পার্শ্বেব চিত্রে ΔADE ও ΔABCএব DE ও BC বাহুদ্বয় পবস্পর সমান্তবাল।

$\therefore \quad \angle D = \angle B,$

$\angle E = \angle C$

এবং $\angle A = \angle A$;

অর্থাৎ, ΔADEএব তিন কোণ যথাক্রমে ΔABCএর তিন কোণের সমান; কিন্তু ΔADE, ΔABCএর অংশ বলিযা উহারা পরস্পব সমান হইতে পারে না।

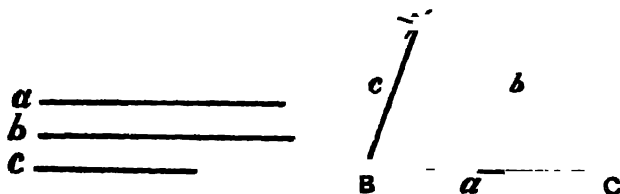
অতএব স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে কোন ত্রিভুজেব (১) দুই বাহু ও উহাদেব অন্তর্ভূত কোণ; (২) তিন বাহু; (৩) দুই কোণ ও এক বাহু; কিংবা, (৪) দুইবাহু এবং উহাদের বৃহত্তরটির বিপরীত কোণ নির্দ্দিষ্ট থাকিলে, প্রত্যেক স্থলে একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত কবা যাইবে।

কিন্তু, শুধু তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব নহে, কারণ, এরূপ কোণ বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কিত কবা যাইতে পাবে।

ত্রিভুজের দুই বাহু ও উহাদের ক্ষুদ্রতরটিব বিপরীত কোণ দেওয়া থাকিলে সাধাবণতঃ দুইটি ত্রিভুজ পাওযা যায়। যেস্থলে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হয় উহাকে **দ্ব্যর্থক স্থল** (Ambiguous case) বলা হয় (১১শ সম্পাদ্য দেখ)।

সম্পাদ্য ৭

এক ত্রিভুজের তিন বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the lengths of the three sides.]

a, *b*, *c*, কোন ত্রিভুজের তিনটি নির্দ্দিষ্ট বাহু।

ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। *a* এর সমান করিয়া BC সরল রেখা টান। Bকে কেন্দ্র করিয়া *c* এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর, এবং Cকে কেন্দ্র করিয়া *b* এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর এই দুইটি চাপ A বিন্দুতে ছেদ করিল ; এখন AB, AC সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, △ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। অঙ্কনানুসারে, ABC ত্রিভুজের

BC = *a*, CA = *b*, AB = *c* ,

∴ △ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ। ই. স. বি.

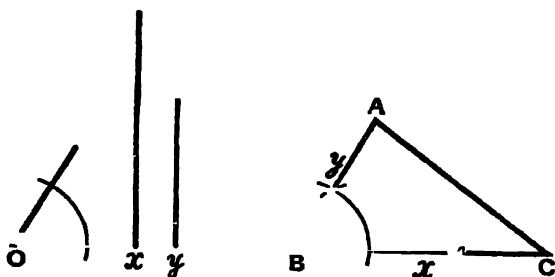
১ম মন্তব্য। চাপ দুইটি BC সরল রেখার অপর পার্শ্বেও অন্য একটি বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিবে ; সুতরাং মোটের উপর দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইতে পারে ; কিন্তু, এই ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

২য় মন্তব্য। *a*, *b*, *c* এর যে কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া আবশ্যক। (১১ উপ.)

সম্পাদ্য ৮

কোন ত্রিভুজের তুই বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ নির্দ্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two sides and the included angle.]

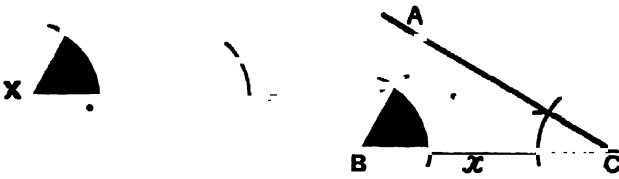
x ও y কোন ত্রিভুজেব তুইটি নির্দ্দিষ্ট বাহু, এবং $\angle O$ ঐ বাহু তুইটির অন্তর্ভূর্ত নির্দ্দিষ্ট কোণ।

ত্রিভুজটি অঙ্কিত কবিতে হইবে।

অঙ্কন। x এর সমান করিয়া BC সরল রেখা টান এবং B বিন্দুতে $\angle O$এর সমান করিয়া CBA কোণ অঙ্কিত কব (৫ম সম্পাদ্য)। এখন BA হইতে y এর সমান BA অংশ কাটিয়া লও এবং AC সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, $\triangle ABC$ই নির্ণেয় ত্রিভূজ হইবে। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ৯(ক)

কোন ত্রিভুজের এক বাহু ও উহার সংলগ্ন কোণ দুইটি নির্দ্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two angles and the side adjacent to them.]

x, কোন ত্রিভুজের একটি নির্দ্দিষ্ট বাহু, এবং ∠X ও ∠Y, x-বাহু-সংলগ্ন দুইটি নির্দ্দিষ্ট কোণ।

ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। x সরল রেখার সমান করিয়া BC সরল রেখা টান এবং উহার B ও C বিন্দুতে ∠X ও ∠Yএর সমান করিয়া যথাক্রমে ∠CBA ও ∠BCA অঙ্কিত কর।

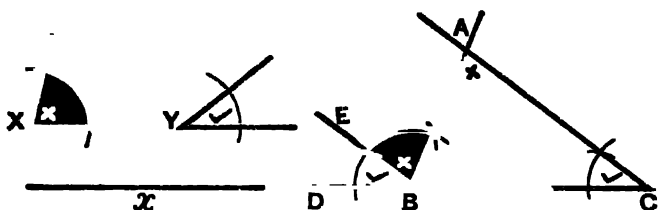
BA ও CA সরল রেখা যেন পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, △ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে। ই. স. বি.

মন্তব্য। ∠X ও ∠Yএর সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট হওয়া আবশ্যক; তাহা না হইলে, BA ও CA বাহু BCএর উপর দিকে ছেদ করিবে না; সুতরাং, ত্রিভুজও উৎপন্ন হইবে না (৮ম উপপাদ্য, ১ম অনুসিদ্ধান্ত)।

সম্পাদ্য ৯ (খ)

কোন ত্রিভুজের দুই কোণ ও উহাদের একটির বিপরীত বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two angles and the side opposite to one of them.]

∠X ও ∠Y কোন ত্রিভুজের নির্দ্দিষ্ট দুইটি কোণ এবং x, ∠Xএর বিপরীত বাহু।

ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। DBC সরল রেখা টান এবং উহা হইতে xএর সমান করিয়া CB অংশ কাটিয়া লও। B ও C বিন্দুতে ∠Yএর সমান করিয়া যথাক্রমে ∠DBE ও ∠BCA অঙ্কিত কর। এখন BE সরল রেখার সহিত B বিন্দুতে ∠Xএর সমান করিয়া ∠EBA অঙ্কিত কর। মনে কর BA ও CA পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে △ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। △ABCএর BC = x ;

∠C = ∠Y ;

∠C + ∠A = △ABCএর বহিঃকোণ DBA = ∠Y + ∠X, (অঙ্কন)।

কিন্তু ∠C = ∠Y ; ∴ ∠A = ∠X।

অতএব, △ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ। ই. স. বি.

মন্তব্য। ∠X ও ∠Yএর সমষ্টি দুই সমকোণ হইতে ক্ষুদ্রতর হওয়া আবশ্যক।

সম্পাদ্য ১০

কোন্ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অন্য একটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a right-angled triangle having given the hypotenuse and another side.]

x, কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ; ও y, ঐ ত্রিভুজের অপর একটি বাহু।

ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

প্রথম প্রণালী

অঙ্কন। y এর সমান করিয়া BC সরল রেখা টান এবং উহার C বিন্দুতে BCA সমকোণ অঙ্কিত কর (৩য় সম্পাদ্য)। এখন B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া x এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। ঐ চাপ যেন CAকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, $\triangle$ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। $\triangle$ABCএর $\angle$C = এক সমকোণ,

অতিভুজ AB = x, এবং BC = y।

$\therefore$ $\triangle$ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ। ই. স. বি.

দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন। x এর সমান করিয়া AB সরল রেখা টান এবং ABকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। এখন O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং OAএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। আবার Bকে কেন্দ্র করিয়া y এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর, ইহা যেন পূর্ব্বোক্ত বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন CA ও CB সংযুক্ত কর। তাহা হইলে, $\triangle$ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। OC সংযুক্ত কর।

$\because$ OC = OA, $\therefore$ $\angle$A = $\angle$OCA।

$\because$ OC = OB, $\therefore$ $\angle$B = $\angle$OCB।

$\therefore$ $\angle$A + $\angle$B = $\angle$OCA + $\angle$OCB = $\angle$C।

$\therefore$ $\angle$C = $\frac{1}{2}$ ($\angle$A + $\angle$B + $\angle$C) = এক সমকোণ।

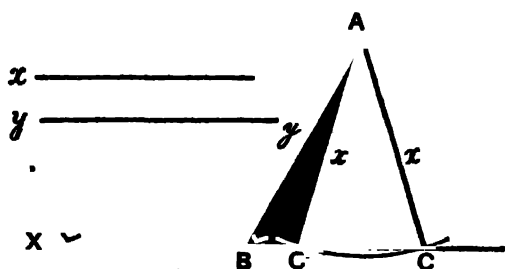
$\therefore$ $\triangle$ABC এর $\angle$C = এক সমকোণ, AB = x ; BC = y।

$\therefore$ $\triangle$ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

ই. স. বি.

সম্পাদ্য ১১

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু ও উহাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given two sides and the angle opposite to one of them.]

x ও y কোন ত্রিভুজের দুইটি নির্দ্দিষ্ট বাহু এবং $\angle X$, x-বাহুর বিপরীত নির্দ্দিষ্ট কোণ। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

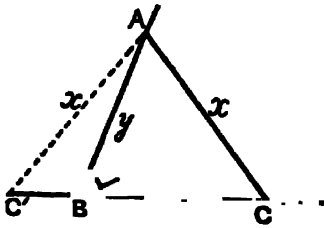
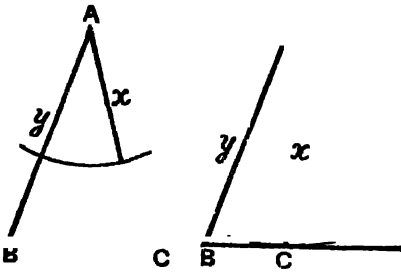
অঙ্কন। $\angle X$এর সমান করিয়া $\angle ABC$ অঙ্কিত কর, এবং BA সরল রেখা হইতে y এর সমান BA অংশ কাটিয়া লও। এখন A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া x এর সমান ব্যাসার্দ্ধ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্ত যেন BCকে B বিন্দুর একই পার্শ্বস্থ C ও C′ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিল (চিত্র দেখ)। CA ও C′A সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, $\triangle ABC$ ও $\triangle ABC'$এর প্রত্যেকটি নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। $\triangle ABC$এর $AC = x$, $AB = y$, $\angle ABC = \angle X$;

এবং $\triangle ABC'$এর $AC' = x$, $AB = y$, $\angle ABC' = \angle X$।

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle ABC'$এর প্রত্যেকটি নির্ণেয় ত্রিভুজ। ই. স. বি.

১ম মন্তব্য। x, y হইতে ক্ষুদ্রতর হইলে C ও C′, B বিন্দুর একই পার্শ্বে থাকিবে (১১৯ পৃষ্ঠার চিত্র দেখ), এবং এরূপস্থলে দুইটি ত্রিভুজ (△ABC ও △ABC′) অঙ্কিত করা যাইবে। কিন্তু x, y হইতে বৃহত্তর হইলে C ও C′, B বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে থাকিবে ; সুতরাং এস্থলে মাত্র একটি ত্রিভুজ △ABC পাওয়া যাইবে (পার্শ্বের চিত্র দেখ)।

২য় মন্তব্য। যদি A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি BC সরল রেখাকে ছেদ না করে, তাহা হইলে কোন ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইবে না। যদি ঐ বৃত্ত BC বাহুকে এক বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহা হইলে, ঐ স্থলে মাত্র একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইবে।

যে স্থলে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হয়, উহাকে **দ্ব্যর্থক স্থল** (Ambiguous case) বলে।

অনুশীলনী ১৯

△ABCএর নিম্নলিখিত অংশগুলি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর :

১। (ক) $a=5$ সে. মি. ; $b=7$ সে. মি. ; $c=3$ সে. মি.

(খ) $a=3''$; $b=4''$; $c=5''$

(গ) $a=5{\cdot}2''$; $b=7{\cdot}3''$; $c=3{\cdot}4''$

২। (ক) $a=5$ সে. মি. ; $b=7$ সে. মি. ; $\angle C=60^\circ$
(খ) $b=7''$, $c=8''$, $\angle A=135$
(গ) $c=5''$, $a=4''$, $\angle B=30^\circ$

৩। (ক) $a=7$ সে. মি. $\angle B=45^\circ$; $\angle C=30^\circ$
(খ) $b=7''$; $\angle B=45^\circ$; $\angle C=30^\circ$
(গ) $c=3$ সে. মি. $\angle B=60^\circ$ $\angle C=45^\circ$

৪। (ক) $b=7$ সে. মি. $c=5$ সে. মি. $\angle B=30^\circ$
(খ) $b=5\cdot7''$; $c=4''$, $\angle B=135$
(গ) $b=6\cdot2$ সে. মি. $c=7\cdot3$ সে. মি. ; $\angle B=120$
(ঘ) $b=8$ সে. মি ; $c=4$ সে. মি. ; $\angle B=30^\circ$

৫। এক সমকোণী ত্রিভুজেব অতিভুজ ও অপব এক বাহু যথাক্রমে (ক) $5''$, $3''$; (খ) $7\cdot5''$, $6''$; (গ) $5\cdot2''$, $4\cdot8''$; প্রত্যেক স্থলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৬। কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি সূক্ষ্মকোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কব।

৭। এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজেব ভূমি ও শিবঃকোণ দেওযা আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কব।

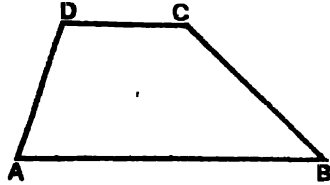
৮। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজেব সমান বাহুদ্বযেব সমষ্টি ও ভূমি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

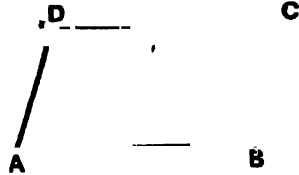
৯। এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ভূমি 6 সেন্টিমিটর এবং অপর দুই বাহু যথাক্রমে 3 ও 5 সেন্টিমিটর, যতদুব সম্ভব নিভুর্ল-ভাবে ত্রিভুজটির উচ্চতা (ভূমি হইতে শীর্ষের দূরত্ব) মাপিযা বাহির কর।
(অঙ্কনের চিহ্ন ও বর্ণনা দিতে হইবে) (ক. প্র., ১৯৩০)

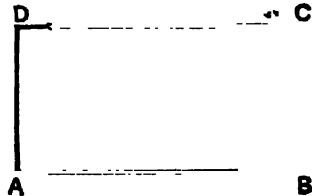
১০। $3''$, $4''$, $5''$ বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। উহার যে কোন দুই কোণেব দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে কোন বাহুব উপর লম্ব টানা হইলে ঐ লম্বটির দৈর্ঘ্য মাপিয়া বল। (ক. প্র., ১৯১৫)
(অঙ্কন চিহ্ন দিতে হইবে)

সামান্তরিক (Parallelogram)

৮১। যে চতুর্ভুজের কেবল দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল তাহার নাম **ট্রাপিজিয়ম** (Trapezium)।

পার্শ্বের চিত্রে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম। ইহার AB ও DC বাহুদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল; কিন্তু, BC ও AD সমান্তরাল নহে।

৮২। যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাহার নাম **সামান্তরিক**।

পার্শ্বের চিত্রে, ABCD একটি সামান্তরিক।

৮৩। যে সামান্তরিকের এক কোণ সমকোণ তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** (Rectangle) বলে।

পার্শ্বের চিত্রে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

পরে প্রমাণিত হইবে যে **আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণই সমকোণ** (২২ উপ., ২ অনুসিদ্ধান্ত)।

৮৪। যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু একটি কোণও সমকোণ নহে তাহার নাম **রম্বস** (Rhombus)।

পার্শ্বের চিত্রে, ABCD একটি রম্বস। রম্বসের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল, ইহা সহজে প্রমাণ করা যায়।

D C A B

অনুশীলনী ২০

১। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে উহা একটি সামান্তরিক হইবে। (ক. প্র., ১৯১১)

২। কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে উহা একটি সামান্তরিক হইবে।

৩। কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে উহা একটি সামান্তরিক হইবে।

৪। প্রমাণ কর যে রম্বস একটি সামান্তরিক।

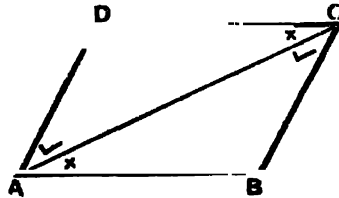
৫। ABCD সামান্তরিকের কর্ণ AC যদি ∠Aকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহা ∠Cকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে, এবং সামান্তরিকটি একটি রম্বস হইবে।

৬। সামান্তরিকের যে কোন দুইটি সন্নিহিত কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় সমকোণ উৎপন্ন করে।

৭। প্রমাণ কর যে কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর সমান না হইলে উহার কোণসমূহের দ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করিবে।

উপপাদ্য ২১

কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হইলে উহার অপর দুইটি বিপরীত বাহুও পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হইবে।

[If a pair of opposite sides of a quadrilateral are equal and paralle, then its other pair of opposite sides also are equal and parallel.]

ABCD চতুর্ভুজের AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BC ও AD পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

AC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। AB এবং DC পরস্পর সমান্তরাল এবং AC ইহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে।

∴ ∠BAC = একান্তর ∠DCA।

এখন, △ABC ও △ADC এর

AB = CD

AC = AC

এবং অন্তর্ভুক্ত ∠BAC = অন্তর্ভুক্ত ∠DCA। (প্রমাণিত)

∴ △ABC ও △ADC সর্বসম।

∴ BC = AD

এবং ∠BCA = ∠DAC ;

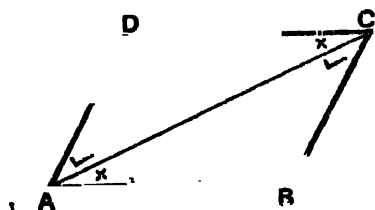
কিন্তু এই দুইটি একান্তর কোণ,

∴ BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল।

অর্থাৎ, BC ও AD পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ২২

সামান্তরিকের (১) বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান; (২) বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান; এবং (৩) প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করে।

[In a parallelogram, (1) the opposite sides are equal; (2) the opposite angles are equal; and (3) each diagonal bisects the parallelogram.]

ABCD একটি সামান্তরিক, এবং AC ইহার একটি কর্ণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(১) AB = CD, ও BC = AD,

(২) ∠ABC = ∠ADC ও ∠BAD = ∠BCD;

এবং (৩) △ABC এর ক্ষেত্রফল = △ADC এর ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ। AB ও DC পরস্পর সমান্তরাল এবং AC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে।

∴ ∠BAC = একান্তর ∠DCA।

আবার, BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল এবং AC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে;

∴ ∠BCA = একান্তর ∠DAC।

সুতরাং, $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$এর

$AC = AC$

$\angle BAC = \angle DCA$ } (প্রমাণিত)
$\angle BCA = \angle DAC$

∴ $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$ সর্ব্বসম। (১৭ উপপাদ্য)

∴ $\triangle ABC$এর ক্ষেত্রফল $=$ $\triangle ADC$এর ক্ষেত্রফল, (৩)

$AB = CD$ এবং $BC = AD$; (১)

$\angle ABC = \angle ADC$, (২)

আবার, $\angle BAC = \angle DCA$ } (প্রমাণিত)
এবং $\angle DAC = \angle BCA$

∴ সমস্ত $\angle BAD =$ সমস্ত $\angle BCD$। (২)

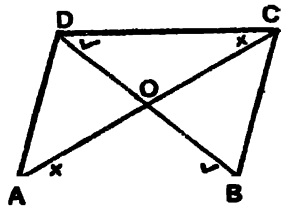
ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

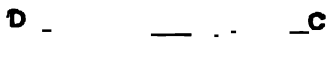
[The diagonals of a parallelogram bisect each other.]

ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AO = CO$,

$BO = DO$।

প্রমাণ। $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$এর

$AB = CD$

$\angle BAO =$ একান্তর $\angle DCO$

$\angle ABO =$ একান্তর $\angle CDO$।

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

অতএব, $AO = CO$; ও $BO = DO$। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ২। সামান্তরিকের এক কোণ সমকোণ হইলে উহার প্রত্যেক কোণ এক সমকোণ হইবে; অর্থাৎ, আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণ সমকোণ।

ABCD একটি সামান্তরিক। মনে কর ইহার

$\angle BAD$ = এক সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে ABCDএর প্রত্যেক কোণ এক সমকোণ।

D C A B

প্রমাণ। AB এবং DC পরস্পর সমান্তরাল,

∴ $\angle BAD + \angle ADC$ = দুই সমকোণ, (১৪ উপপাদ্য)

কিন্তু, $\angle BAD$ = এক সমকোণ,

∴ $\angle ADC$ = এক সমকোণ।

আবার, সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান,

∴ $\angle BCD = \angle BAD$ = এক সমকোণ,

এবং $\angle ABC = \angle ADC$ = এক সমকোণ।

অর্থাৎ, ABCDএর প্রত্যেক কোণ এক সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর সমান হইলে উহার সকল বাহুগুলি পরস্পর সমান হইবে।

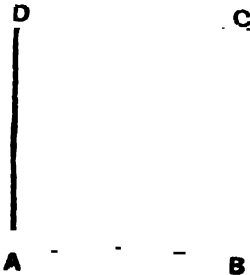
মনে কর ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং ইহার AB = AD।

ABCD একটি সামান্তরিক বলিয়া ইহার বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান।

∴ CD = AB ; AD = BC

কিন্তু, AB = AD।

∴ CD = AB = AD = BC।

D C A B

৮৫। যে আযতক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু পবস্পর সমান তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (Square) বলে।

অতএব, **বর্গক্ষেত্রের সমস্ত বাহু পরস্পর সমান ও প্রত্যেক কোণ সমকোণ** (২য অনুসিদ্ধান্ত)।

অনুশীলনী ২১

১। দুই সমান্তবাল সবল রেখাব ব্যবধান সর্ব্বত্র সমান।

[সঙ্কেত। ইহাদেব একটি হইতে অপবটিব যে কোন দুই বিন্দুর দূরত্ব পবস্পর সমান।]

২। একটি সামান্তরিকেব দুই সন্নিহিত বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অপব এক সামান্তবিকের দুই সন্নিহিত বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণেব সমান হইলে সামান্তবিক দুইটি সর্ব্বসম হইবে।

[উপবিপাত দ্বাবা প্রমাণ কর।]

৩। কোন সামান্তবিকের কর্ণদ্বয সমান হইলে উহা একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। (ক. প্র., ১৯২৫)

৪। প্রমাণ কর :

(ক) আযতক্ষেত্রেব কর্ণদ্বয পবস্পব সমান।

(খ) বর্গক্ষেত্রেব কর্ণদ্বয পবস্পব সমান।

৫। প্রমাণ কর যে বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয পবস্পবকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করবে। (ক. প্র., ১৯২২)

৬। প্রমাণ কব যে কোন সামান্তবিকেব দুইটি সন্নিহিত বাহু সমান হইলে, ঐ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

৭। ABCD একটি সামান্তরিক; এবং E ও F যথাক্রমে ACএর দুইটি বিন্দু। যদি AE=CF হয়, প্রমাণ কব যে BEDF একটি সামান্তরিক।

৮। ABCD একটি সামান্তবিক; এবং X ও Y যথাক্রমে AB ও CD বাহুর উপর দুইটি বিন্দু। যদি AX=CY হয়, প্রমাণ কর যে BXDY একটি সামান্তরিক।

৯। ABC ও XYZ ত্রিভুজদ্বযের AB ও XY বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল; এবং BC ও YZ বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান এবং

সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে CA ও ZX বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হইবে। (পা. প্র., ১৯২৪)

১০। ABC ত্রিভুজের A, B ও C দিয়া যথাক্রমে উহাদের বিপরীত বাহুর সমান্তরাল করিয়া সরল রেখা টানিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, উহা এবং △ABC পরস্পর সদৃশকোণ হইবে।

১১। ABCD একটি সামান্তরিক। উহার মধ্যে যে কোন একটি বিন্দু O লও, এবং OAEB, OBFC, OCGD ও ODHA সামান্তরিকগুলি অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে EFGH একটি সামান্তরিক।

(ক. প্র., ১৯২৩)

৮৬। **প্রতিসাম্য-অক্ষ** (Axis of Symmetry)। যদি কোন ক্ষেত্র একটি সরল রেখা দ্বারা এরূপ দুই অংশে বিভক্ত হয় যে ঐ ক্ষেত্রকে উক্ত সরল রেখাক্রমে ভাঁজ করিলে অংশ দুইটি পরস্পর মিলিয়া যায় তাহা হইলে ঐ সরল রেখাকে ক্ষেত্রটির **প্রতিসাম্য-অক্ষ** বলে।

যথা, ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের প্রতিসাম্য-অক্ষ। ৫ম উপপাদ্যের চিত্রে AD, △ABCএর প্রতিসাম্য অক্ষ; কারণ, △ABCকে AD সরল রেখাক্রমে ভাঁজ করিলে △ABD ও △ACD পরস্পর মিলিয়া যাইবে, (∵ △ABD ও △ACD সর্বসম)।

বর্গক্ষেত্রের যে কোন কর্ণ বর্গক্ষেত্রের প্রতিসাম্য-অক্ষ, এইরূপ রম্বসের যে কোন কর্ণ ঐ রম্বসের প্রতিসাম্য-অক্ষ।

প্রশ্ন।

(১) আয়তক্ষেত্রের প্রতিসাম্য-অক্ষ কয়টি? প্রমাণ কর যে আয়তক্ষেত্রের যে কোন দুইটি বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখা উহার প্রতিসাম্য-অক্ষ হইবে।

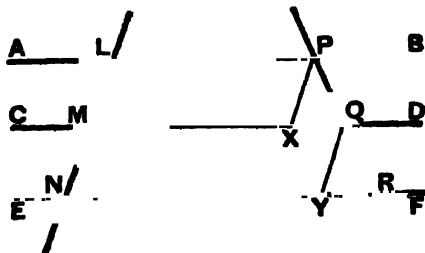
(২) সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি উহার প্রতিসাম্য-অক্ষ।

(৩) কোণের দ্বিখণ্ডক ঐ কোণের প্রতিসাম্য অক্ষ।

(৪) বর্গক্ষেত্রের চারিটি প্রতিসাম্য-অক্ষ আছে দেখাও।

উপপাদ্য ২৩

তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরল রেখা কোন ভেদককে সমান সমান অংশে বিভক্ত করিলে ঐ সমান্তরাল সরল রেখাগুলি অন্য যে কোন ভেদককেও সমান সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

[If three or more parallel lines make equal intercepts on any transversal, they make equal intercepts on any other transversal.]

AB, CD ও EF সমান্তরাল সরল রেখাগুলি LMN ভেদককে LM ও MN এই দুই সমান অংশে বিভক্ত করিয়াছে।

মনে কর PQR অন্য একটি ভেদক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PQ = QR।

P ও Q হইতে LMNএর সমান্তরাল PX ও QY সরল রেখাদ্বয় টান।

প্রমাণ। ∵ LMXP একটি সামান্তরিক

∴ PX = বিপরীত বাহু LM ;

আবার, ∵ MNYQ একটি সামান্তরিক

∴ QY = বিপরীত বাহু MN ;

কিন্তু, LM = MN ; ∴ PX = QY।

এখন, ∵ PX ও QY (প্রত্যেকে LMNএর সহিত সমান্তরাল বলিয়া) পরস্পর সমান্তরাল, এবং PQR উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে ;

∴ ∠XPQ = অনুরূপ ∠YQR।

আবার ∵ CD ও EF পরস্পর সমান্তরাল, এবং PQR উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে ;

∴ ∠XQP = অনুরূপ ∠YRQ।

তাহা হইলে, △PQX ও △QRY-এর

PX = QY

∠XPQ = ∠YQR

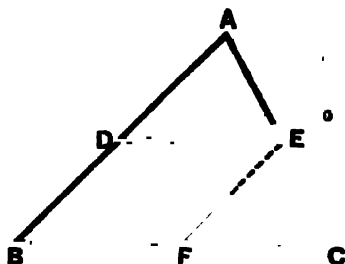
∠XQP = ∠YRQ।

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম

∴ PQ = QR। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ২৩ (ক)

যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া ঐ ত্রিভুজের অন্য এক বাহুর সমান্তরাল একটি সরল রেখা টানা যায়, তাহা হইলে ঐ সরল রেখা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। (ক. প্র., ১৯২৩ ; বো. প্র., ১৯১৩)

[The straight line, drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another, bisects the third side.]

D, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু। মনে কর, D দিয়া BCএর সমান্তরাল DE সরল রেখা টানা হইল, এবং উহা যেন ACকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AE = EC।

AB এর সমান্তরাল করিয়া EF সরল রেখা টান।

প্রমাণ। BFED একটি সামান্তরিক

∴ BD = বিপরীত বাহু EF

কিন্তু, BD = AD ; ∴ AD = EF।

এখন, ∵ EF ও AB পরস্পর সমান্তরাল

∴ ∠DAE = অনুরূপ ∠FEC।

আর ∵ DE ও BC পরস্পর সমান্তরাল

∴ ∠AED = অনুরূপ ∠ECF।

তাহা হইলে, △ADE ও △EFCএর

AD = EF

∠DAE = ∠FEC

এবং ∠AED = ∠ECF

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ AE = EC। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ২৩ (খ)

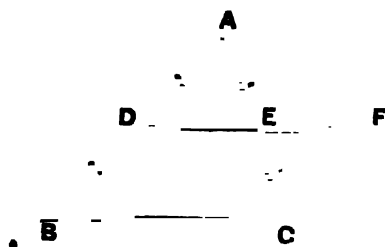
ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্দ্ধেক।

(ক. প্র., ১৯১৭, ১৯৩৪ ; ঢা. প্র., ১৯৩৩, ১৯৩৫ ; পাট. প্র., ১৯৩৫)

[The straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side, and equal to half of it.]

A

D E F

B C

D ও E যথাক্রমে $\triangle ABC$এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

DE ও BC পরস্পর সমান্তরাল এবং $DE = \frac{1}{2} BC$।

DEকে F বিন্দু পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন $EF = DE$ হয়।

CF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\triangle ADE$ ও $\triangle CEF$এর

$AE = CE$

$DE = EF$ (অঙ্কন)

এবং $\angle AED =$ বিপ্রতীপ $\angle CEF$।

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম

$\therefore$ $AD = CF$

এবং $\angle DAE = \angle ECF$।

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ,

∴ DA ও CF পরস্পর সমান্তরাল

অর্থাৎ, BD ও CF পরস্পর সমান্তরাল।

এখন, BD = AD এবং AD = CF ;

∴ BD = CF।

অতএব, BD ও CF পরস্পর সমান ও সমান্তরাল

∴ DF ও BC পরস্পর সমান্তরাল ও সমান (২১ উপপাদ্য)

অর্থাৎ, DE ও BC পরস্পর সমান্তরাল ,

এবং ∵ DE = EF ; ∴ DE = $\frac{1}{2}$ DF = $\frac{1}{2}$ BC। ই. উ. বি.

অনুশীলনী ২২

*১। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-বিন্দু ও অতিভুজের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখা অতিভুজের অর্দ্ধেক। (ক. প্র., ১৯১৯)

[সঙ্কেত : অতিভুজের মধ্যবিন্দু হইতে কোন বাহুর সমান্তরাল একটি সরল রেখা টান।]

২। কোন ত্রিভুজের যে কোন বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা এবং অন্য বাহু দুইটির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৩। ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহু পর্য্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরল রেখা অন্য দুই বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

৪। কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দু সংযুক্ত করিলে ত্রিভুজটি চারিটি সর্ব্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

৫। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৬। যে কোন চতুর্ভুজের চারি বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি পর পর সংযুক্ত করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে; এবং এই সামান্তরিকের বাহু-সমষ্টি ঐ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে।

৭। প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখাদ্বয় পরস্পর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (ঢা. প্র., ১৯৩৫)

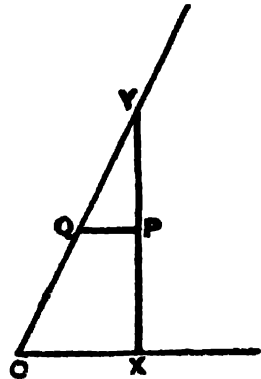
৮। ABCD একটি চতুর্ভুজ; X, Y যথাক্রমে AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু: এবং P, Q যথাক্রমে AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে XPYQ একটি সামান্তরিক; এবং XY ও PQ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৯। ABCD একটি সামান্তরিক; এবং E, F যথাক্রমে AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে EC এবং AF, BDকে সমত্রিখণ্ডিত করে। (বো. প্র., ১৯২৪)

১০। কোন ট্রাপিজিয়মের দুইটি অসমান্তরাল বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরল রেখা (১) প্রত্যেক কর্ণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে; (২) উহা ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুইটির সহিত সমান্তরাল; এবং (৩) উহা সমান্তরাল বাহু দুইটির সমষ্টির অর্দ্ধেক। (বো. প্র., ১৯৩৫)

[সঙ্কেত: অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটির মধ্যবিন্দু দিয়া অপরটির সমান্তরাল একটি সরল রেখা টান।]

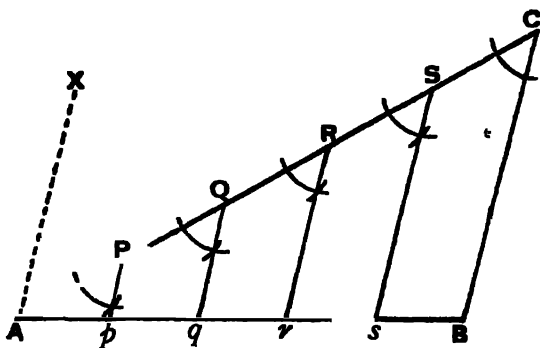
১১। একটি নির্দ্দিষ্ট কোণের অন্তর্গত কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোণের বাহুদ্বয় পর্য্যন্ত এমন একটি সরল রেখা টান যাহা উক্ত বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। এরূপ কয়টি সরল রেখা টানা যায়?

[মনে কর ∠XOYএর অন্তর্গত P বিন্দু হইতে এরূপ একটি রেখা টানিতে হইবে। P হইতে OXএর সমান্তরাল করিয়া PQ টান; ইহা যেন OYকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন OY হইতে OQএর সমান করিয়া QY অংশ

কাটিয়া লও। YP সংযুক্ত কর। ইহা OXকে X বিন্দুতে ছেদ করিলে, XYই নির্ণেয় সরল রেখা।

∵ Q একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, এবং OQ = QY, ∴ Y একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। অতএব এইরূপ একটিমাত্র সরল রেখা টানা যাইবে।]

সম্পাদ্য ১২

একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে যে কোন সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

[To divide a given straight line into any number of equal parts.]

AB একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। মনে কর ইহাকে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

প্রথম প্রণালী

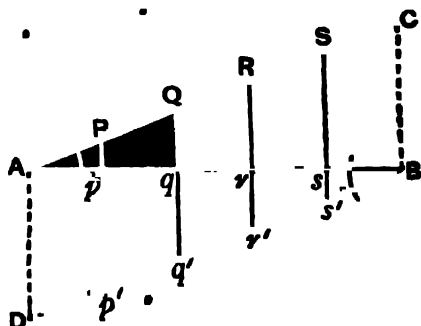
অঙ্কন। A বিন্দু হইতে যে কোন সরল রেখা AC টান ; এবং ইহা হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া AP, PQ, QR, RS ও SC অংশ কাটিয়া লও। BC সংযুক্ত কর। এখন, P, Q, R, S হইতে CBএর সমান্তরাল P*p*, Q*q*, R*r*, S*s* সরল রেখা টান। ইহারা যেন ABকে যথাক্রমে *p*, *q*, *r*, *s* বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে AB সরল রেখা p, q, r, s বিন্দুতে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত হইবে।

প্রমাণ। মনে কর A হইতে BCএর সমান্তরাল AX সরল রেখা টানা হইল।

এখন, AX, pP, qQ, rR, sS, BC সরল রেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল, এবং ইহা AC ভেদককে AP, PQ, QR ইত্যাদি সমান সমান অংশে বিভক্ত করিযাছে ; সুতরাং, ইহারা AB ভেদককেও সমান সমান অংশে বিভক্ত করিবে। (২৩ উপপাদ্য)

অর্থাৎ, AB সরল রেখা p, q, r, s বিন্দুতে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত হইল। ই. স. বি.

দ্বিতীয় প্রণালী

A বিন্দু হইতে AC সরল রেখা টান ; এবং ইহা হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া AP, PQ, QR ও RS কাটিয়া লও। এখন B বিন্দু হইতে CAএর সমান্তরাল BD সরল রেখা টান এবং BD হইতে APএর সমান Bs', $s'r'$, $r'q'$ ও $q'p'$ অংশ কাটিয়া লও। এখন Ss', Rr', Qq' ও Pp' সংযুক্ত কর।

এই রেখাগুলি ABকে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত করিবে (চিত্র)।

প্রমাণ। APএর সমান করিয়া AC হইতে SC, এবং BD হইতে p'D অংশ কাটিয়া লও। BC ও AD সংযুক্ত কর।

এখন, ∵ AP = DP', (প্রত্যেক APএর সমান বলিয়া)

এবং AP ও Dp' পরস্পর সমান্তরাল (অঙ্কন)

∴ AD ও Pp' সমান্তরাল। (২১ উপপাদ্য)

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, Pp' ও Qq' পরস্পর সমান্তরাল, ইত্যাদি।

অর্থাৎ AD, Pp', Qq', Rr', Ss' ও CB পরস্পর সমান্তরাল। কিন্তু ইহারা AC ভেদককে AP, PQ ইত্যাদি পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত করিয়াছে।

∴ ইহারা AB ভেদককেও পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত করে, (২৩ উপ.)।

ই. স. বি.

৮৭। নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার যে কোন ভগ্নাংশ অঙ্কন।

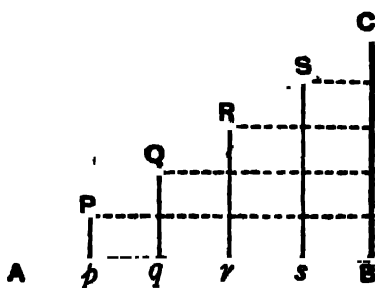
১২শ সম্পাদ্যের চিত্রে, Ap = $\frac{1}{5}$AB, Aq = $\frac{2}{5}$AB, Ar = $\frac{3}{5}$AB, As = $\frac{4}{5}$AB।

অতএব, এই প্রণালীতে একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাব যে কোন ভগ্নাংশ অঙ্কন করা যাইতে পারে।

আবার, Ar = $\frac{3}{5}$ AB,

Br = $\frac{2}{5}$ AB।

∴ Ar : Br = 3 : 2।

অর্থাৎ, AB সরল রেখা r বিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে বিভক্ত হইল।

অতএব, উক্ত নিয়মে একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে যে কোন অনুপাতে বিভক্ত করা যায়।

P, Q, R, S হইতে ABএর সমান্তরাল সরল রেখা টানিয়া

প্রমাণ করা যায় যে $Qq = 2Pp$, $Rr = 3Pp$, $Ss = 4Pp$, $CB = 5Pp$ (চিত্র দেখ)।

অতএব, $AP = PQ = \cdots = \frac{1}{5}AC$ হইলে,

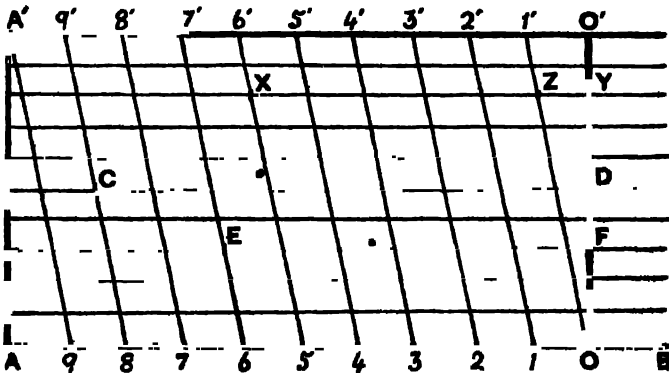
$$Pp = \frac{1}{5}BC,\ Qq = \frac{2}{5}BC,\ Rr = \frac{3}{5}BC, \cdots।$$

এইরূপ, $AP = PQ = \cdots = \frac{1}{n}AC$ হইলে,

$$Pp = \frac{1}{n}BC,\ Qq = \frac{2}{n}BC,\ Rr = \frac{3}{n}BC,\ \text{ইত্যাদি}।$$

এইরূপ ভাবে প্রদর্শিত হইতে পারে যে, যদি $AR = \frac{m}{n}AC$ হয়, তাহা হইলে $Ar = \frac{m}{n}AB$; এবং $Rr = \frac{m}{n}BC$ হইবে।

কর্ণ মাপনী (Diagonal Scale)

৮৮। **কর্ণ মাপনী**। সাধারণ মাপনী দ্বারা ইঞ্চি ও ইঞ্চির যে কোন দশাংশ মাপা হয়, কিন্তু নিম্নলিখিত প্রণালীতে প্রস্তুত মাপনীর সাহায্যে ইঞ্চির যে কোন শতাংশ নির্ণয় করা যাইতে পারে, এরূপ মাপনীর নাম কর্ণ মাপনী।

যে কোন একটি সরল রেখা AB লইয়া উহা হইতে 1" ইঞ্চির সমান OA অংশ কাটিয়া লও, এবং OAএর উপর OO'A'A আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত

কর। OAকে 1, 2, 3, 4,…9, A বিন্দুতে, এবং O′A′কে 1′, 2′, 3′,… 9′, A′ বিন্দুতে দশ সমান ভাগে বিভক্ত কর ; এবং OAএর O, 1, 2,…9 চিহ্নিত বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে O′A′এর 1′, 2′,… A′ চিহ্নিত বিন্দুর সহিত সংযুক্ত কর। এখন, OO′কে সমান দশ ভাগে বিভক্ত কর এবং ভাগ-বিন্দুগুলি দিযা OAএর সমান্তরাল নযটি সরল রেখা টান। তাহা হইলে, একটি **কর্ণ মাপনী** অঙ্কিত করা হইল। ইহা দ্বারা ইঞ্চির যে কোন শতাংশ মাপা যাইবে।

ব্যবহার প্রণালী

নিম্নলিখিত দুইটি কথা মনে রাখিলে, নীচের উদাহরণ দ্বারা কর্ণ মাপনীর ব্যবহার প্রণালী সহজেই বুঝা যাইবে।

(১) চিত্রের ছোট ছোট সামান্তরিকগুলির যে বাহু OAএর সমান্তরাল উহাদের প্রত্যেকটি ·1′ (সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান বলিয়া)।

(২) OO′1′ ত্রিভুজের OO′ বাহুর প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়,…ভাগ-বিন্দু দিযা অঙ্কিত O′1′এর সমান্তরাল সরল রেখাগুলির দৈর্ঘ্য, যথাক্রমে O′1′এর $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ অর্থাৎ, ·01″, ·02″, ·03″… ; কারণ, O′1′ = ·1″, (৮৭ অনু.)।

১ম উদাহরণ। চিত্রের (ক) YZ, (খ) XY, (গ) CD ; (ঘ) EF সরল রেখার দৈর্ঘ্য কত দেখিযা বল।

(ক) YZ, OO′এর অষ্টম ভাগ-বিন্দু দিযা অঙ্কিত সমান্তরাল সরল রেখা।

∴ YZ = O′1′এর $\frac{8}{10}$ = ·1″ × $\frac{8}{10}$ = ·08″।

(খ) XY = XZ + ZY = ·5″ + ·08″ = ·58″, (∵ XZ = ছোট পাঁচটি বাহুর সমষ্টি = ·5″)।

এইরূপে, (গ) CD = ·85″ ; এবং (ঘ) EF = ·63″।

২য় উদাহরণ। 1·58″ দীর্ঘ একটি সরল রেখা অঙ্কিত কর।

যে কোন একটি সরল রেখা অঙ্কিত কর। কাঁটা কম্পাস দ্বারা উহা হইতে প্রথমে 1″ অংশ কাটিয়া লও। এখন কাঁটা কম্পাসের একটি কাঁটা OO′এর অষ্টম ভাগ বিন্দু Yএর উপর রাখ, এবং অন্য কাঁটাটি OAএর সমান্তরাল ভাবে উহার 5 চিহ্নিত বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কর্ণের ছেদ বিন্দু X পর্য্যন্ত বিস্তৃত কর। এখন উক্ত অঙ্কিত সরল রেখা হইতে এই XYএর সমান করিয়া পূর্ব্বাঙ্কিত অংশের অব্যবহিত পরবর্ত্তী আর একটি অংশ কাটিয়া লও। তাহা হইলে নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্য অঙ্কিত করা হইল।

কারণ, অঙ্কিত দৈর্ঘ্য $= 1'' + XY = 1'' + \cdot58''$, (১ উদা., খ.)

$= 1\cdot58''$।

এইরূপ ভাবে যে কোন নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্য মাপাও যাইতে পারে।

মন্তব্য। (১) ৮৮ অনুচ্ছেদের অঙ্কনে OA এক সেণ্টিমিটর হইলে, অনুরূপ কর্ণ মাপনীর দ্বারা সেণ্টিমিটরের শতাংশও মাপিতে পারা যাইবে।

(২) OO′কে n ভাগে বিভক্ত করিয়া ঐ ভাগ-বিন্দুগুলি হইতে OAএর সমান্তরাল করিয়া n রেখা টানিলে, ইঞ্চি বা সেণ্টিমিটরের যে-কোন $\frac{1}{10n}$ অংশও মাপিতে পারা যাইবে।

অনুশীলনী ২৩

নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যগুলিকে 3, 4, 6 ও 7 সমান অংশে বিভক্ত কর :

১। 4·2″ ২। 5·8 সে. মি. ৩। 10·5 সে. মি.

৪। 5·9″ ৫। 6·5″ ৬। 5·83″

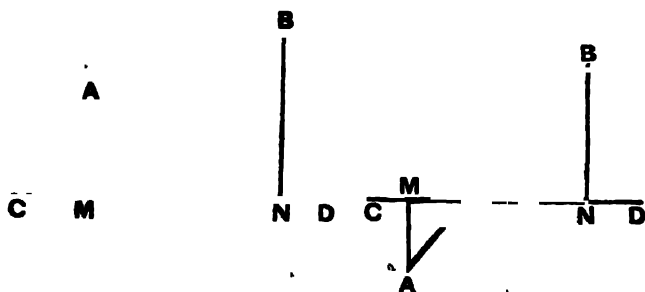
৭। ·79″ ৮। 1·62″

৯। 7·2″কে 5 : 4 অনুপাতে বিভক্ত কর।

১০। 8·9″ সে. মি.কে 3 : 5 অনুপাতে বিভক্ত কর।

১১। AB একটি নির্দ্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরল রেখা। ABকে বর্দ্ধিত করিয়া উহার উপর এমন একটি বিন্দু C অঙ্কিত কর যেন AC : BC = 5 : 2 হয়।

১২। এমন একটি কর্ণ মাপনী প্রস্তুত কর যাহা দ্বারা মিলিমিটরের সপ্তমাংশগুলি অঙ্কিত করা যাইবে।

৮৯। লম্ব-অভিক্ষেপ (Orthogonal projection)।

AB সরল রেখার A ও B প্রান্ত হইতে অপর একটি সীমাহীন সরল রেখা CDএর উপর যথাক্রমে AM ও BN লম্ব অঙ্কিত করা হইলে MNকে, CDএর উপর ABএর **লম্ব-অভিক্ষেপ** বলা হয়।

অনুশীলনী ২৪

১। কোন সরল রেখার লম্ব-অভিক্ষেপ ঐ সরল রেখা হইতে বৃহত্তর হইতে পারে না। উহারা পরস্পর সমান হইতে পারে কি ?

২। কোন সরল রেখার মধ্যবিন্দুর লম্ব-অভিক্ষেপ ঐ সরল রেখার লম্ব-অভিক্ষেপের মধ্যবিন্দু হইবে।

[কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের পদকে ঐ বিন্দুর লম্ব-অভিক্ষেপ বলা যাইতে পারে।]

৩। কোন সরল রেখার উপর দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরল রেখার লম্ব-অভিক্ষেপ পরস্পর সমান।

৪। কোন সরল রেখার উপর অপর দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার লম্ব-অভিক্ষেপ পরস্পর সমান হইলে শেষোক্ত সরল রেখা দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

৫। যে কোন সরল রেখার উপর AB ও BCএর লম্ব-অভিক্ষেপের সমষ্টি ACএর লম্ব-অভিক্ষেপের সমান হইবে।

৬। AB একটি সরল রেখা, এবং P উহার মধ্যবিন্দু। A, B, P হইতে অন্য একটি সবল বেখা CDএর উপব যথাক্রমে AM, BN ও PQ লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কব যে,

(ক) $PQ = \frac{1}{2}(AM + BN)$, যদি A ও B, CDএর একই পার্শ্বে থাকে,

(খ) $PQ = \frac{1}{2}(AM \sim BN)$, যদি A ও B, CDএর বিপরীত পার্শ্বে থাকে।

৭। ABCD একটি সামান্তরিক। A, B, C ও D হইতে সামান্তরিকের বহিঃস্থ কোন সবল রেখার উপর যথাক্রমে AM, BN, CP ও DQ লম্ব অঙ্কিত কবা হইল। প্রমাণ কর যে, $AM + CP = BN + DQ$।

৯০। **বিশ্লেষণ** (Analysis)। জ্যামিতির কঠিন প্রশ্ন সমূহের উত্তব নির্ণয করিতে নিম্নলিখিত প্রণালী অবলম্বন করা হইযা থাকে:

কোন উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত প্রমাণ করিতে হইলে প্রথমতঃ মনে কর ঐ সিদ্ধান্তটি সত্য, এবং যুক্তি দ্বারা ক্রমান্বয়ে স্থির করিতে থাক ঐ সত্য মানিয়া লওয়াতে উপপাদ্যের কল্পনাতে যাহা দেওয়া হইয়াছে তাহা পাওয়া যায কিনা; যদি পাওয়া যায় তাহা হইলে যে সূত্রক্রমে সিদ্ধান্তের সত্য হইতে কল্পনার বিষয়ে উপনীত হওয়া গিয়াছে, তাহার বিপরীত ক্রম অবলম্বন করিলেই কল্পনার বিষয় হইতে সিদ্ধান্তের সত্যে উপস্থিত হওয়া যাইবে।

শেষোক্ত প্রক্রিয়াকে, অর্থাৎ কল্পনা হইতে যুক্তি দ্বারা সিদ্ধান্তের বিষয়ে যাওয়াকে **সংশ্লেষণ** (Synthesis) বলে, এবং পূর্ব্বোক্ত প্রক্রিয়াকে, অর্থাৎ সিদ্ধান্তকে স্বীকার করিয়া যুক্তি দ্বারা কল্পনার বিষয়ে উপনীত হওয়াকে **বিশ্লেষণ** (Analaysis) বলে।

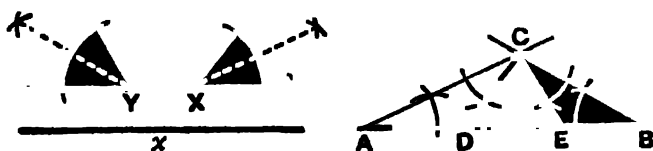
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞাতেও অনুরূপ নিয়ম অবলম্বন করিলে সমাধান সহজ হয়। প্রথমতঃ **বিশ্লেষণ** প্রক্রিয়া দ্বারা, সম্পাদ্যের অঙ্কন কার্য্য সম্পন্ন হইয়াছে স্বীকার করিয়া যুক্তি সাহায্যে ক্রমান্বয়ে কোন্ কোন্ নির্দ্দিষ্ট বিষয়ে উপনীত হওয়া যায় তাহা লক্ষ্য করিতে হয়; পরে ইহার বিপরীত ক্রম অবলম্বন করিলেই, অর্থাৎ সংশ্লেষণ দ্বারা নির্দ্দিষ্ট বিষয় হইতেই সম্পাদ্যের সমাধান করা যায়।

পরবর্ত্তী কয়েকটি অনুচ্ছেদে এই প্রণালী প্রয়োগের দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

ত্রিভুজ অঙ্কন

(জটিল প্রশ্ন)

৯১। কোন ত্রিভুজের বাহু-সমষ্টি ও দুই কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the perimeter and two angles.]

কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর সমষ্টি, x সরল রেখার সমান; এবং উহার দুই কোণ $\angle X$ ও $\angle Y$এর সমান। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

বিশ্লেষণ। মনে কর △CDE নির্ণেয় ত্রিভুজ এবং ইহার ∠CDE = ∠X, ∠CED = ∠Y।

DEকে উভয় দিকে A ও B পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর যেন AD = CD ও EB = EC হয়।

তাহা হইলে AB, ত্রিভুজের বাহু-সমষ্টির সমান হইল।

এখন, ∵ CD = AD, ∴ ∠DCA = ∠DAC।

কিন্তু, বহিঃকোণ CDE = ∠DCA + ∠DAC = 2∠DAC,

অর্থাৎ, ∠DAC = $\frac{1}{2}$∠CDE = $\frac{1}{2}$∠X।

∴ ∠DAC = ∠DCA = $\frac{1}{2}$∠X।

এইরূপ, ∠EBC = ∠ECB = $\frac{1}{2}$∠Y।

কিন্তু, AB বাহু, ∠BAC এবং ∠ABC জানা আছে বলিয়া △ABC অঙ্কিত করা যায়, সুতরাং এখন বিপরীতক্রম অবলম্বন করিলেই △ABC হইতে △CDE অঙ্কনের নিম্নলিখিত প্রণালী পাওয়া যাইবে :

সংশ্লেষণ। x এর সমান করিয়া AB সরল রেখা টান, এবং A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে ∠X ও ∠Yএর অর্দ্ধেকের সমান করিয়া ∠BAC ও ∠ABC অঙ্কিত কর। এখন, C বিন্দুতে ∠BACএর সমান করিয়া ∠ACD, এবং ∠ABCএর সমান করিয়া ∠BCE অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে △DCEই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

৯২। কোন ত্রিভুজের এক কোণ, ঐ কোণ-সংলগ্ন এক বাহু, এবং অবশিষ্ট বাহু দুইটির সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle, having given an angle, one of the sides containing the angle, and the sum of the remaining two sides.]

মনে কর △ABCএর ∠B, a ও $(b+c)$ দেওয়া আছে।

ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। a এর সমান করিয়া BC সরল রেখা টান, ও B বিন্দুতে ∠Bএর সমান করিয়া CBD কোণ অঙ্কিত কর। BD হইতে $b+c$ এর সমান BD অংশ কাটিয়া লও। CD সংযুক্ত কর, এবং C বিন্দুতে ∠CDBএর সমান করিয়া ∠DCA অঙ্কিত কর।

মনে কর CA, BDকে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে △ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

৯৩। কোন ত্রিভুজের এক কোণ, কোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি, এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given an angle, the side opposite to it, and the sum of the remaining two sides.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের ∠B, $c+a$ ও b দেওয়া আছে

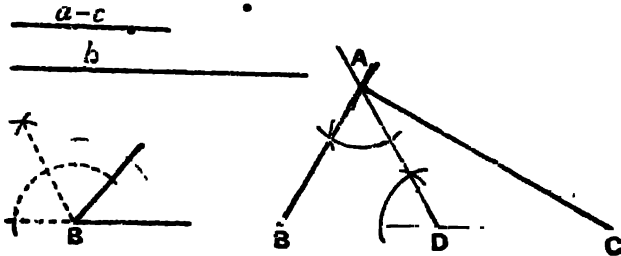
ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। $c+a$ এর সমান করিয়া CBD সরল রেখা টান, এবং উহার D বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle$Bএর সমান করিয়া $\angle$CDA অঙ্কিত কর। এখন Cকে কেন্দ্র করিয়া b এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর ইহা DAকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দুতে $\angle$CDAএর সমান করিয়া $\angle$DAB অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে $\triangle$ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

মন্তব্য। Cকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত চাপ, DAকে সাধারণতঃ দুই বিন্দুতে ছেদ করিবে; সুতরাং, সাধারণতঃ দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইবে।

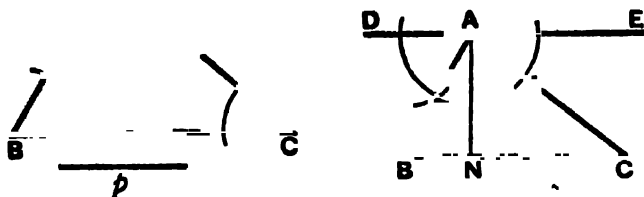
৯৪। কোন ত্রিভুজের এক কোণ, কোণ-সংলগ্ন বাহু দুইটির অন্তর, এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given an angle, the side opposite to it, and the difference of the remaining two sides.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের $\angle$B, $a-c$ ও b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। $a-c$ এর সমান করিয়া CD সরল রেখা টান, এবং CDকে B বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। এখন D বিন্দুতে $(90^\circ-\frac{1}{2}\angle B)$ এর সমান করিয়া $\angle$BDA অঙ্কিত কর, এবং Cকে কেন্দ্র করিয়া b এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। উহা যেন DAকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, A বিন্দুতে $\angle$ADBএর সমান করিয়া $\angle$CAB অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

৯৫। কোন ত্রিভুজের দুইকোণ, এবং কোণদ্বয়-সংলগ্ন বাহু হইতে বিপরীত শীর্ষের দূরত্ব দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle having given the base angles and the distance of the base from the opposite vertex.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের ∠B, ∠C, এবং BC বাহু হইতে Aএর দূরত্ব p দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। p এর সমান করিয়া AN সরল রেখা টান এবং N বিন্দুতে ANএর উপর BNC লম্ব অঙ্কিত কর। এখন, A বিন্দু দিয়া BCএর সমান্তরাল DAE সরল রেখা টান; এবং ∠B ও ∠Cএর সমান করিয়া যথাক্রমে ∠DAB ও ∠EAC অঙ্কিত কর।

প্রমাণ কর যে △ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

অনুশীলনী ২৫

১। সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির দূরত্ব দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের তিন বাহুর সমষ্টি, এবং ভূমি হইতে শীর্ষের দূরত্ব দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৩। এক সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন বাহু দুইটির সমষ্টি ও অতিভুজ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। এরূপ কয়টি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে? (৯৩ অনু.)

৪। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর এক বাহুর সমষ্টি, এবং তৃতীয় বাহু দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (৯২ অনু.)

৫। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন বাহু দুইটির অন্তর এবং অতিভুজ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (৯৪ অনু.)

৬। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর সমষ্টি ও দুই কোণ যথাক্রমে (ক) 12″; 60°, 45°; (খ) 7 সে. মি.; 30°, 45°; (গ) 6″; 120°, 30°; (ঘ) 10 সে. মি.; 135°, 30°। প্রত্যেক স্থলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (৯১ অনু.)

৭। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু, এবং A হইতে BCএর দূরত্ব দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ ও শীর্ষ হইতে ভূমির দূরত্ব দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৯। ABC ত্রিভুজের AB, BC, ও A হইতে BCএর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১০। ABC ত্রিভুজের AB − AC = 4″, BC = 6″, এবং ∠A = 60°; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (৯৪ অনু.)

১১। ABC ত্রিভুজের AB + AC = 8″·2, BC = 5″ ও ∠A = 30°; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (৯৩ অনু.)

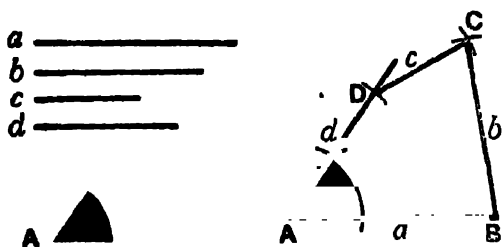
১২। ABC ত্রিভুজের BC + CA = 12 সে.মি., AB = 6·2 সে. মি. ও ∠A = 60°; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (৯২ অনু.)

চতুর্ভুজ অঙ্কন

৯৬। চতুর্ভুজের চারি বাহু ও চারি কোণ, এই আটটি অঙ্গ। কোন চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইলে এই আটটি অঙ্গের পাঁচটি দেওয়া থাকা আবশ্যক।

সম্পাদ্য ১৩

কোন চতুর্ভুজের চারি বাহু ও এক কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a quadrialteral having given four sides and an angle.]

মনে কর a, b, c, d কোন চতুর্ভুজের চারি বাহুর দৈর্ঘ্য; এবং $\angle$A, a ও d বাহুর অন্তর্ভূত কোণ।

চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। a এর সমান করিয়া AB সরল রেখা অঙ্কিত কর, এবং উহার A বিন্দুতে $\angle$Aএর সমান করিয়া $\angle$BAD অঙ্কিত কর। AD হইতে d এর সমান করিযা AD অংশ কাটিয়া লও।

এখন, B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যথাক্রমে b ও c এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ দুইটি যেন পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC ও DC সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCDই নির্ণেয় চতুর্ভুজ হইবে।

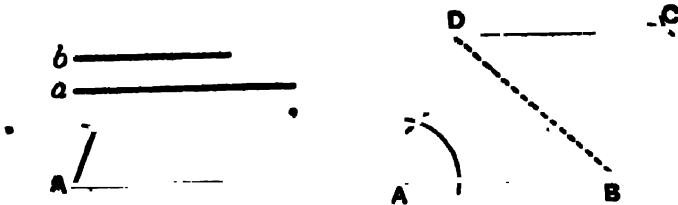
প্রমাণ। ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও DA বাহু যথাক্রমে a, b, c ও d এর সমান, এবং ∠BAD = ∠A।

∴ ABCDই নির্ণেয় চতুর্ভুজ। ই. স. বি.

দ্রষ্টব্য। কোন ত্রিভুজের তিন বাহু দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যায়; কিন্তু, চতুর্ভুজের চারি বাহু দেওয়া থাকিলে একটি নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কিত করা যায় না, অর্থাৎ চারিটি নির্দ্দিষ্ট বাহু বিশিষ্ট বহু চতুর্ভুজ অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

সম্পাদ্য ১৪

কোন সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু ও ঐ বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a parallelogram having given two adjacent sides and the included angle.]

মনে কর a ও b, কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু; ও ∠A উহাদের অন্তর্ভূত কোণ।

সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। a সরল রেখার সমান করিয়া AB সরল রেখা অঙ্কিত কর; এবং A বিন্দুতে ∠Aএর সমান BAD কোণ অঙ্কিত কর। এখন AD হইতে b এর সমান AD অংশ কাটিয়া লও, এবং B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে b ও a এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ দুইটি যেন পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল। CB ও CD সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD নির্ণেয় সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ। BD সংযুক্ত কর।

△ABD ও △CBDএর

AB = CD (∵ প্রত্যেক a এর সমান)

AD = BC (∵ প্রত্যেক b এর সমান)

BD = BD

সুতরাং, ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম;

∴ ∠ABD = ∠CDB।

কিন্তু, ইহারা একান্তর কোণ;

∴ AB ও DC পরস্পর সমান্তরাল।

এইরূপ, BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল।

∴ ABCD একটি সামান্তরিক;

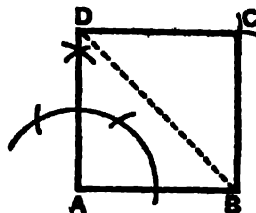
ইহার AB ও AD বাহু যথাক্রমে a ও b এর সমান এবং ∠BAD = ∠A।

∴ ABCDই নির্ণেয় সামান্তরিক।

ই. স. বি.

সম্পাদ্য ১৫

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square on a given side.]

AB, একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। ABএর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A বিন্দুতে ABএর উপর AD লম্ব টান, এবং AD হইতে ABএর সমান AD অংশ কাটিয়া লও। এখন, B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ABএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ দুইটি যেন পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল। CB ও CD সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র হইবে।

প্রমাণ। $\because$ AB = CD

ও AD = BC,

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

এখন, $\because$ $\angle$BAD = এক সমকোণ।

$\therefore$ ABCD একটি আয়তক্ষেত্র :

এবং $\because$ AB = AD,

সুতরাং, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। ই. স. বি.

অনুশীলনী ২৬

ABCD চতুর্ভুজের নিম্নলিখিত অংশগুলি দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর :

১। $\angle A = 60°$, $AB = 1.3''$, $BC = 2.4''$, $CD = 1.5''$, $DA = 2.7''$

২। $\angle B = 120°$, $AB = 5$ সে. মি., $BC = 6.2$ সে. মি., $DA = 3$ সে. মি., $CD = 6.1$ সে. মি.

৩। $\angle C = 135°$, $AB = BC = 5''$, $CD = 6''$, $AD = 5.1''$

৪। কোন সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত ভুজ যথাক্রমে $5''$ ও $7''$; ইহাদের অন্তর্ভূত কোণ $120°$ হইলে, সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

৫। ABCD সামান্তরিকের $AB = 7''$, $AD = 5''$, $\angle ADB = 60°$ হইলে, সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

৬। কোন আয়তক্ষেত্রের দুই সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে $5''$ ও $6''$; আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

৭। একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু $6.2''$; বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

৮। একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ $= 7$ সে. মি.; বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

৯। একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণ ও এক বাহু দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর। (সম্পাদ্য ১০)

১০। কোন সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু ও এক কর্ণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

১১। কোন সামান্তরিকের দুই কর্ণ ও এক বাহু দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

১২। কোন চতুর্ভুজের চারি বাহু ও এক কর্ণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

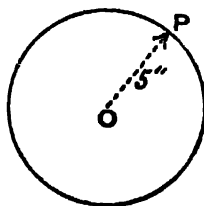
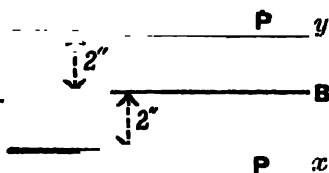
১৩। একটি রম্বসের বাহু ও একটি কর্ণ দেওয়া আছে; রম্বসটি অঙ্কিত কর।

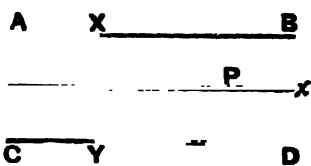
১৪। একটি সামান্তরিকের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে, সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

১৫। একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় দেওয়া আছে, রম্বসটি অঙ্কিত কর।

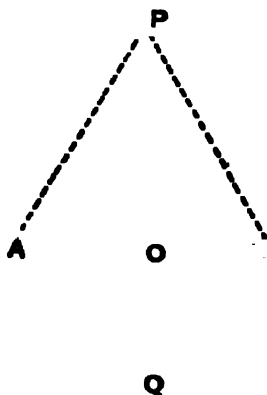
সঞ্চারপথ (Loci)

৯৭। নির্দ্দিষ্ট নিয়মে গতিশীল কোন বিন্দু যে পথ বা পথ সমূহে ভ্রমণ করে, তাহাকে ঐ বিন্দুর **সঞ্চারপথ** (Locus) বলে।

১ম উদাহরণ। মনে কর কোন বিন্দু P, একটি নির্দ্দিষ্ট স্থির বিন্দু O হইতে 5″ ইঞ্চি দূরে থাকিয়া একটি সমতলের উপর ভ্রমণ করিতেছে। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে যদি O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও 5″ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তাহা হইলে P বিন্দু এই বৃত্তের উপর থাকিবে, অর্থাৎ এই বৃত্তই হইবে P বিন্দুর ভ্রমণ পথ বা সঞ্চারপথ।

২য় উদাহরণ। মনে কর কোন বিন্দু P একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা AB হইতে 2″ ইঞ্চি দূরে থাকিয়া ভ্রমণ করিতেছে। এখন, AB সরল রেখার উভয় পার্শ্বে 2″ ইঞ্চি দূরে উহার সমান্তরাল তুইটি সরল রেখা x ও y অঙ্কিত করিলে P বিন্দু এই সরল রেখাদ্বয়ের কোন একটির উপর থাকিবে; অর্থাৎ, এই সরল রেখা তুইটিই হইবে Pএর ভ্রমণ পথ বা সঞ্চারপথ।

৩য় উদাহরণ। মনে কর কোন বিন্দু P, তুইটি সমান্তরাল সরল রেখা AB ও CDএর সমান দূরে থাকিয়া ভ্রমণ করিতেছে।

AB এবং CDএর সহিত সমান্তরাল করিয়া এইরূপ একটি সরল রেখা x অঙ্কিত কর যেন উহা AB ও CDএর উপর অঙ্কিত যে কোন লম্ব XYকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তাহা হইলে xই হইবে Pএর সঞ্চারপথ; কারণ, x এর যে কোন বিন্দু AB ও CD হইতে $\frac{1}{2}$XY দূরে, অর্থাৎ AB ও CD হইতে সমদূরবর্ত্তী।

সম্পাদ্য ১৬

কোন বিন্দু এইরূপ ভাবে ভ্রমণ করে যে দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব সর্ব্বাবস্থায় পরস্পর সমান। প্রথমোক্ত বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the locus of a point whose distances from two given points are equal.]

মনে কর A ও B দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, এবং অপর একটি বিন্দু P এইরূপে ভ্রমণ করিতেছে যে সর্ব্বাবস্থায় PA = PB।

P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

AB সংযুক্ত কর। মনে কর O, AB-এর মধ্যবিন্দু;

∴ O, P বিন্দুর সঞ্চারপথের একটি বিন্দু, (∵ OA = OB)

এখন, মনে কর P, ঐ গতিশীল বিন্দুটির যে কোন একটি অবস্থান।

∴ PA = PB।

এখন, PO, PA, PB সংযুক্ত কর।

$\triangle AOP$ ও $\triangle BOP$এর

$PA = PB$

$OA = OB$

$OP = OP$

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ $\angle AOP = \angle BOP$;

কিন্তু, ইহারা সন্নিহিত কোণ,

∴ PO, ABএর উপর O বিন্দুতে লম্ব।

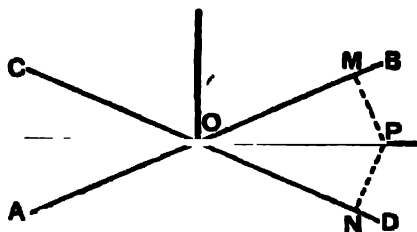
কিন্তু, O, AB সরল রেখার মধ্য বিন্দু বলিয়া উহা একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, এবং O বিন্দুতে ABএর উপর একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত করা যায়; সুতরাং, PO একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা;

∴ P, যে কোন অবস্থানে এই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা POএর উপর থাকিবে;

অর্থাৎ, ABএর মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বই নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।

সম্পাদ্য ১৭

কোন বিন্দু এইরূপভাবে ভ্রমণ করে যে উহা সর্ব্বাবস্থায় পরস্পর ছেদকারী দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা হইতে সমদূরবর্ত্তী থাকে। ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the locus of a point equidistant from two given intersecting straight lines.]

মনে কর দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা AB ও CD, পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিযাছে, এবং কোন বিন্দু P, AB ও CD হইতে সর্ব্বদা সমান দূরে থাকিযা ভ্রমণ করিতেছে।

P-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর P, ঐ গতিশীল বিন্দুর যে কোন অবস্থান। P হইতে AB ও CD-এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব অঙ্কিত কর। OP সংযুক্ত কর।

$\because$ P, AB ও CD হইতে সমদূরবর্ত্তী,

$\therefore$ PM = PN।

এখন, OPM ও OPN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OP = অতিভুজ OP

এবং PM = PN

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ ∠POM = ∠PON।

অর্থাৎ, OP, ∠BODএর দ্বিখণ্ডক।

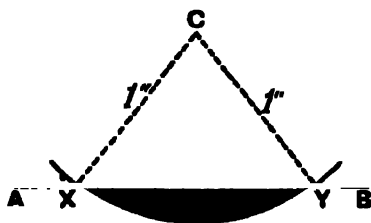
অতএব P, ∠BODএর মধ্যে থাকিলে উহা ∠BODএর দ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে P, ∠AODএর মধ্যে থাকিলে উহা ∠AODএর দ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে।

অতএব, AB ও CDএর অন্তর্ভূত কোণসমূহের দ্বিখণ্ডকগুলিই নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।

৯৮। দুই সঞ্চারপথের ছেদ দ্বারা কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়।

১ম উদাহরণ। মনে কর AB সরল রেখার কোন্ কোন্ বিন্দু ঐ সরল রেখার বহিঃস্থ বিন্দু C হইতে 1″ দূরে অবস্থিত, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও 1″ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। নির্ণেয় বিন্দু C হইতে 1″ দূরে অবস্থিত বলিয়া উহা এই বৃত্তের উপর থাকিবে; কিন্তু, উহা AB সরল রেখার উপরও অবস্থিত; সুতরাং, স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে AB সরল রেখা এবং উক্ত বৃত্তের ছেদ বিন্দু X ও Yই হইবে নির্ণেয় বিন্দুর অবস্থান।

২য় উদাহরণ। *তিনটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুটি নির্ণয় করিতে হইবে।

A ও B হইতে সমদূরবর্ত্তী সমস্ত বিন্দু AB সরল রেখার মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব DOএর উপর থাকিবে।

(১৬ সম্পাদ্য)

এইরূপ, B ও C হইতে সমদূরবর্ত্তী যাবতীয় বিন্দুগুলি BCএর মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব EOএর উপর থাকিবে;

অতএব, DO এবং EO, এই সঞ্চারপথদ্বয়ের ছেদবিন্দু O নির্ণেয় বিন্দু হইবে;

কারণ, $OA = OB$ এবং $OB = OC$

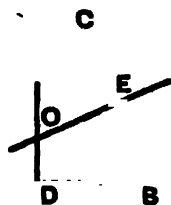
$\therefore \quad OA = OB = OC$।

অতএব, দুইটি নিয়মের অধীন কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইলে নিয়ম দুইটির এক একটির অধীন হইলে বিন্দুটির কোন্ কোন্ সঞ্চারপথ হইবে তাহা পৃথক্‌ভাবে নির্ণয় কর। এইরূপে প্রাপ্ত সঞ্চারপথদ্বয়ের ছেদবিন্দুই হইবে উক্ত বিন্দুর নির্ণেয় অবস্থান।

দ্রষ্টব্য। যদি সঞ্চারপথগুলি পরস্পর ছেদ না করে, তাহা হইলে সেস্থলে ঐরূপ অবস্থান অসম্ভব জানিবে।

অনুশীলনী ২৭

১। কোন নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল; ঐ ত্রিভুজের শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল; উহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৪। কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও ভূমি দেওয়া আছে। উহার শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৫। একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৬। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে অতিভুজ করিয়া সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে ঐ ত্রিভুজের সমকোণ-বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা OA ও OB পরস্পর লম্ব। যদি কোন নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যযুক্ত গতিশীল সরল রেখা PQএর প্রান্তদ্বয় সর্ব্বাবস্থায় OA ও OBএর উপর অবস্থিত থাকে তাহা হইলে PQএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৮। দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা পরস্পর লম্ব হইলে ঐ রেখাদ্বয় হইতে যদি একটি গতিশীল বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি স্থির থাকে, তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৯। A ও B হইতে সমদূরবর্ত্তী ও C হইতে নির্দ্দিষ্ট দূরে অবস্থিত বিন্দুগুলির অবস্থান নির্ণয় কর।

১০। AB ও CD দুইটি সরল রেখা। CDএর কোন্ বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্ত্তী ?

১১। ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহু হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুগুলি নির্ণয় কর। এইরূপ কয়টি বিন্দু পাওয়া যাইবে ? (সম্পাদ্য ১৭)

১২। ABC ত্রিভুজের BC বাহু, এবং A হইতে BCএর দূরত্ব দেওয়া আছে। যদি A একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখায় অবস্থিত থাকে, তাহা হইলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

সমবিন্দু সরল রেখা

৯৯। **সমবিন্দু সরল রেখা** (Concurrent straight lines) ।

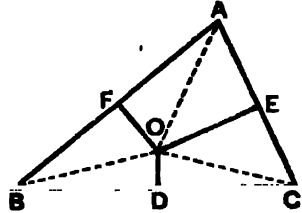
তিন বা ততোধিক সরল রেখা যদি পরস্পরকে এক বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে উহাদিগকে **সমবিন্দু সরল রেখা** বলে ; এবং উহাদের ছেদ বিন্দুকে **সম্পাতবিন্দু** (Point of concurrence) বলা হয়।

নিম্নে কয়েকটি সমবিন্দু সরল রেখার দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

১০০। কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

[The perpendiculars drawn to the sides of a triangle from their middle points are concurrent.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ, এবং D, E ও F যথাক্রমে ইহার BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু।

E ও F বিন্দুতে CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে EO এবং FO লম্ব অঙ্কিত কর। ইহারা যেন O বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিল। OD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে DO, BCএর উপর লম্ব হইবে।

OA, OB ও OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\triangle$AOF ও $\triangle$BOFএর

AF = BF

FO = FO

এবং $\angle$AFO = $\angle$BFO, ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম ; $\therefore$ OA = OB।

এইরূপ, $\triangle$AOE ও $\triangle$COEএর সর্ব্বসমতা হইতে প্রমাণ করা যায় যে

OA = OC ; $\therefore$ OB = OC।

এখন, $\triangle BOD$ ও $\triangle COD$এর

$OB = OC$ (প্রমাণিত)

$OD = OD$

$BD = CD$

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম

∴ $\angle ODB = \angle ODC$।

কিন্তু, ইহারা সন্নিহিত কোণ

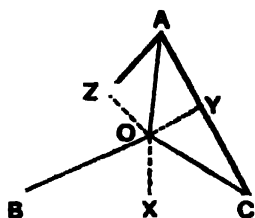
∴ OD, BCএর উপর লম্ব।

অতএব, ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হইল, অর্থাৎ উহারা সমবিন্দু। ই. উ. বি.

১০১। কোন ত্রিভুজের কোণ তিনটির দ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

[The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ, এবং BO ও CO সরল রেখাদ্বয় যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। OA সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OA, $\angle A$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

O হইতে BC, CA ও ABএর উপর যথাক্রমে OX, OY ও OZ লম্ব অঙ্কিত কর।

প্রমাণ। $\triangle BOX$ ও $\triangle BOZ$এর

$OB = OB$

$\angle OBX = \angle OBZ$

$\angle OXB = \angle OZB$, (∵ প্রত্যেকে সমকোণ)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ $OX = OZ$।

এইরূপ, $\triangle COX$ ও $\triangle COY$এর সর্ব্বসমতা হইতে প্রমাণ করা যায় যে

$OX = OY$;

$\therefore \quad OY = OZ$ ।

এখন, AOY ও AOZ সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির

অতিভুজ AO = অতিভুজ AO

OY = OZ । (প্রমাণিত)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম ।

$\therefore \quad \angle OAY = \angle OAZ$;

অর্থাৎ OA, $\angle A$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিল ।

অতএব, ত্রিভুজের কোণ তিনটির দ্বিখণ্ডকত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হইল, অর্থাৎ উহারা সমবিন্দু । ই. উ. বি.

১০২ । কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু ।

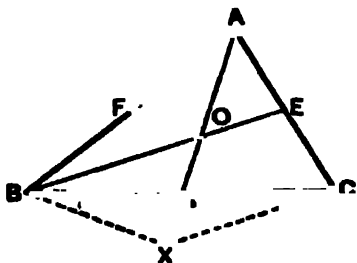
[The medians of a triangle are concurrent.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ ; এবং BE ও CF, ইহার দুইটি মধ্যমা । এই মধ্যমাদ্বয় যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল । AO সংযুক্ত করিয়া বর্দ্ধিত কর ; মনে কর ইহা BCএর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AD, ত্রিভুজটির অবশিষ্ট মধ্যমা ।

B বিন্দু হইতে OCএর সমান্তরাল করিয়া BX সরল রেখা টান । ইহা যেন বর্দ্ধিত ADকে X বিন্দুতে ছেদ করিল । CX সংযুক্ত কর ।

প্রমাণ । F, $\triangle ABX$এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু ; এবং FO, BXএর সমান্তরাল ।

∴ O, AXএর মধ্যবিন্দু । [২৩ (ক) উপপাদ্য]

এখন, O এবং E যথাক্রমে $\triangle ACX$এর AX ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু;

∴ OE, XCএর সমান্তরাল, [২৩ (খ) উপপাদ্য]

অর্থাৎ, BO, XCএর সমান্তরাল।

সুতরাং, BOCX একটি সামান্তরিক ;

∴ ইহার OX ও BC কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু ;

অর্থাৎ AD, একটি মধ্যমা।

∴ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় প্রত্যেকে উহাদের সম্পাতবিন্দুতে এইরূপ দুই অংশে বিভক্ত হয় যে সম্পাতবিন্দু ও শীর্ষের মধ্যবর্তী অংশ অপর অংশের দ্বিগুণ।

প্রমাণ। O, AXএর মধ্যবিন্দু (প্রমাণিত)

∴ $AO = OX$

কিন্তু, $OX = 2\ OD$, (∵ D, OXএর মধ্যবিন্দু)

∴ $AO = 2\ OD$।

এইরূপ, $BO = 2\ OE$;

$CO = 2\ OF$।

মন্তব্য। $AO = 2\ OD$, ∴ $OD = \frac{1}{3}\ AD$

এইরূপ, $OE = \frac{1}{3}\ BE$

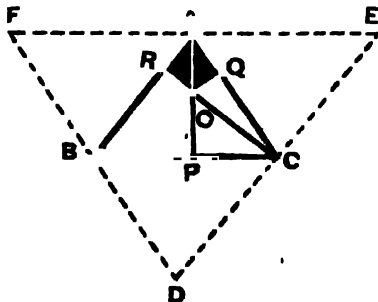
$OF = \frac{1}{3}\ CF$।

অতএব, মধ্যমাত্রয়ের সম্পাতবিন্দু উহাদের একটি **ত্রিখণ্ডন-বিন্দু** (Point of trisection)।

১০৩। কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে **ভরকেন্দ্র** (Centroid) বলে।

১০৪। ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলি সমবিন্দু।

[The perpendiculars from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ ; এবং AP, BQ ও CR, ঐ ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে এই তিনটি লম্ব সমবিন্দু।

A, B ও C বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে BC, CA ও ABএর সমান্তরাল করিয়া FE, DF ও ED সরল রেখা টান। ইহারা যেন △DEF উৎপন্ন করিল।

প্রমাণ। ACBF চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল,
অর্থাৎ, ACBF একটি সামান্তরিক।
∴ AF = BC।
এইরূপ, ABCE একটি সামান্তরিক ;
∴ AE = BC।
∴ AF = AE ; অর্থাৎ A, EFএর মধ্যবিন্দু।
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে B, DFএর, এবং C, DEএর মধ্যবিন্দু।
এখন, ∵ AP, BCএর উপর লম্ব ; এবং EF, BCএর সমান্তরাল ;
∴ AP, EFএর উপর লম্ব।
এইরূপ BQ, DFএর উপর, এবং CR, DEএর উপর লম্ব।
অতএব, AP, BQ ও CR, DEF ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব ;

∴ উহারা সমবিন্দু। (১০০ অনু.)

ই. উ. বি.

১০৫। ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলির ছেদবিন্দুকে **লম্ববিন্দু** (Orthocentre) বলে।

১০৪ অনুচ্ছেদের চিত্রে O, △ABCএর লম্ববিন্দু।

অনুশীলনী ২৮ (বিবিধ প্রশ্ন)

১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ, ভূমির যে কোন বহিঃকোণের সমান।

২। ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুদ্বয়কে D ও E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। BE এবং CDকে যথাক্রমে F এবং G বিন্দু পর্য্যন্ত এরূপভাবে বর্দ্ধিত করা হইল যেন EF = BE এবং DG = DC হয়। প্রমাণ কর যে AF এবং AG একই সরল রেখায় অবস্থিত থাকিবে। (বো. প্র., ১৮৯৩)

৩। কোন চতুর্ভুজের দুই কর্ণের সমষ্টি ঐ চতুর্ভুজের ভিতরের যে কোনও বিন্দু হইতে শীর্ষগুলির দূরত্বের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর নহে। (মা. প্র., ১৮৬৩)

৪। সামান্তরিকের দুইটি বিপরীত শীর্ষ হইতে উহার কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় পরস্পর সমান।

৫। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC। BA এবং CAকে A বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে E এবং F বিন্দু পর্য্যন্ত এরূপভাবে বর্দ্ধিত করা হইল যেন AE, AFএর সমান হয়। FB ও ECএর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে K ও L হইলে প্রমাণ কর যে FB = EC এবং AK = AL। (ক. প্র., ১৮৯৪)

৬। PQ, একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; এবং A ও B, PQ সরল রেখার বহিঃস্থ দুইটি বিন্দু। PQএর উপর একটি বিন্দু নির্দ্দেশ কর যাহা A ও B হইতে সমদূরবর্ত্তী। (পা. প্র., ১৮৭৭)

৭। ABCDE একটি সুষম পঞ্চভুজ। প্রমাণ কর যে ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৮। ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদ বিন্দু O দিয়া BCএর সমান্তরাল একটি রেখা টানা হইল। যদি এই রেখাটি AB এবং AC বাহুকে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে MN = MB + NC।

৯। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC। ∠B ও ∠Cএর দ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে AC ও AB বাহুর সহিত E ও D বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে DE ও BC সমান্তরাল।

১০। চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ ঐ চতুর্ভুজের অবশিষ্ট কোণদ্বয়ের সমষ্টির অর্দ্ধেকের সমান।

১১। প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজের কোণত্রয়ের দ্বিখণ্ডকগুলি সমবিন্দু; এবং উহাদের সম্পাতবিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলির পরিমাণ যথাক্রমে $90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$, $90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$, ও $90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$।

১২। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে উহা একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

১৩। যে সামান্তরিকের কোনও কোণ সমকোণ নহে তাহার কর্ণদ্বয় পরস্পর অসমান।

১৪। কোন সামান্তরিকের শীর্ষগুলি হইতে উহার বহিঃস্থ একটি সরল রেখার উপর চারিটি লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে এই চারিটি লম্বের সমষ্টি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে অঙ্কিত লম্বের চারিগুণ।

১৫। কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত যে কোনও সরল রেখা ঐ ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখাদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৬। এক ত্রিভুজের পরিসীমা ও ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

১৭। এক ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (বো. প্র., ১৮৮৫)

১৮। নিম্নলিখিত প্রত্যেকস্থলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর :

(ক) এক বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা ও অন্য দুই বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে।

[সঙ্কেত : এমন এক $\triangle ACX$ অঙ্কিত কর যাহার AC, CX প্রদত্ত বাহুদ্বয়ের সমান, এবং AX প্রদত্ত মধ্যমার দ্বিগুণ। ACXB সামান্তরিক অঙ্কিত কর। তাহা হইলে ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ।]

(খ) দুই বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য ও তৃতীয় বাহু দেওয়া আছে।

[সঙ্কেত : এমন এক $\triangle BOC$ অঙ্কিত কর, যাহার BC বাহু প্রদত্ত বাহুর সমান ; এবং BO ও CO প্রদত্ত মধ্যমাদ্বয়ের দুই-তৃতীয়াংশ। BOCX সামান্তরিক অঙ্কিত করিয়া উহার XO কর্ণকে A বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর যেন $OA = XO$ হয়। প্রমাণ কর যে ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ।]

(গ) তিন মধ্যমার দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। (বো. প্র., ১৮৯৫)

[সঙ্কেত : এমন এক $\triangle COX$ অঙ্কিত কর, যাহার বাহুগুলি প্রদত্ত মধ্যমাত্রয়ের দুই-তৃতীয়াংশ। COBX সামান্তরিক অঙ্কিত করিয়া উহার XO কর্ণকে A বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর যেন $OA = XO$ হয়। প্রমাণ কর যে ABCই নির্ণেয় ত্রিভুজ।]

১৯। AOB কোণের অন্তর্গত একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু X দিয়া এমন একটি সরল রেখা টান যেন উহার OA ও OBএর মধ্যবর্ত্তী অংশটি X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

২০। AB ও CD, দুইটি নির্দ্দিষ্ট সমান্তরাল সরল রেখা। কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু P হইতে এমন একটি সরল রেখা টানিতে হইবে যেন উহার AB ও CDএর মধ্যবর্ত্তী অংশটি একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হয়। এইরূপ কয়টি সরল রেখা অঙ্কিত করা যায় ? এইরূপ অঙ্কন সব স্থলে সম্ভব কি ?

২১। কোন স্তম্ভ 200 ফুট দূরবর্ত্তী ভূমিস্থ এক বিন্দুর সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে, অঙ্কন দ্বারা স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

২২। কোন ত্রিভুজের ভূমি, অন্য দুই বাহুর সমষ্টি, এবং ভূমি-সংলগ্ন এক কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। কোন্ স্থলে অঙ্কন অসম্ভব হইবে ?

২৩। ভূমি, অন্য দুই বাহুর অন্তরফল, এবং ভূমি-সংলগ্ন এক কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। কোন্ স্থলে অঙ্কন অসম্ভব হইবে?

২৪। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য এবং অন্য দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। অন্য দুই বাহুর অন্তরফল দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজটি কিরূপে অঙ্কিত করিবে দেখাও। (ক. প্র., ১৮৭৬)

২৫। এক নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর কোন নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান শিরঃকোণ করিয়া এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

২৬। এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এরূপ এক সরল রেখা অঙ্কিত কর যাহা পরস্পর ছেদকারী দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিবে। (ক.প্র., ১৮৬১ ; পা..প্র., ১৮৭৬)

২৭। AB, ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ। ABএর উপর এরূপ একটি বিন্দু D নির্দ্দেশ কর যেন D হইতে ACএর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য DBএর সমান হয়। (ক. প্র., ১৮৯৪, ১৮৮৩)

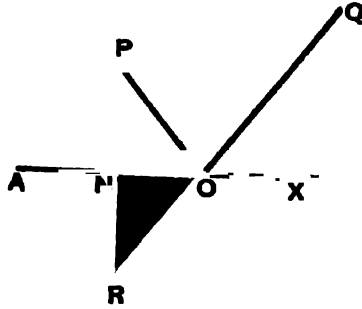
২৮। যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহু অন্য এক বাহু হইতে বৃহত্তর হয়, তবে বৃহত্তর বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা ক্ষুদ্রতর বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে।

২৯। AB এবং DC দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরল রেখা। প্রমাণ কর যে AC এবং BD পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। কোন্ অবস্থায় AC, BDএর সমান হইবে? (ক. প্র., ১৮৬২, ১৮৬৩)

৩০। কোন সমকোণী ত্রিভুজের এক সূক্ষ্মকোণ অন্য সূক্ষ্মকোণের দ্বিগুণ হইলে, প্রমাণ কর যে অতিভুজ ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ হইবে। (ক. প্র., ১৮৫৮ ; পা. প্র., ১৮৮৯)

৩১। একটি প্রবৃদ্ধকোণশূন্য বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি বহিঃকোণ সমূহের সমষ্টির পাঁচগুণ ; বহুভুজের বাহু সংখ্যা নির্ণয় কর।

৩২। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার এক পার্শ্বস্থ দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন দুই সরল রেখা অঙ্কিত কর যেন উহারা ঐ সরল রেখার উপর মিলিত হইয়া উহার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[সঙ্কেত : P ও Q, AB সরল রেখার একই পার্শ্বস্থ দুইটি বিন্দু। P হইতে AB এর উপর PN লম্ব অঙ্কিত কর এবং PNকে R বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর যেন NR = PN হয়। RQ সংযুক্ত কর; ইহা যেন ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। PO সংযুক্ত কর।

প্রমাণ কর যে PO এবং OQ নির্ণেয় রেখা হইবে।]

৩৩। যদি কোন সরল রেখার একই পার্শ্বস্থ দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরল রেখার অন্তর্গত কোন বিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখাদ্বয় প্রথমোক্ত সরল রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে অঙ্কিত রেখাদ্বয়ের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হইবে। (ক. প্র., ১৯৩৪)

[সঙ্কেত : উপরের চিত্রে ABএর O ব্যতীত অন্য যে কোন বিন্দু X লইলে $\triangle RXQ$এ, $RX+XQ > RQ$; $\therefore PX+XQ > PO+OQ$]

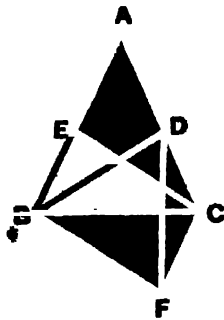
৩৪। কোন চতুর্ভুজের চারি বাহু, এবং দুই বিপরীত বাহুর অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

(বিশ্লেষণ প্রণালী প্রয়োগ কর।)

৩৫। ABC ত্রিভুজে, $\angle A$এর দ্বিখণ্ডক, এবং A হইতে BCএর উপর লম্ব টান। দেখাও যে এই দুইটির অন্তর্ভূত কোণ, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$এর অন্তরের অর্দ্ধেক। (ক. প্র., ১৯০৩ ; পা. প্র., ১৮৭৬)

৩৬। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির যে কোন বিন্দু হইতে সমান বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব দুইটির সমষ্টি, ভূমির যে কোনও প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের সমান। (পা. প্র., ১৮৮৬)

৩৭। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির বর্দ্ধিত অংশে কোনও বিন্দু লইলে, ঐ বিন্দু হইতে সমান বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব দুইটির অন্তরফল ভূমির যে কোনও প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের সমান।

৩৮। কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [অডিট্ ও একাউণ্ট পরীক্ষা, ১৯১৯]

BD ও CE, ABC ত্রিভুজের ∠B ও ∠Cএর দ্বিখণ্ডক, এবং BD = CE।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB = AC।

B হইতে ECএর সমান ও সমান্তরাল করিয়া BF টান। FC ও FD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। যদি AB ও AC সমান না হয়, তাহা হইলে ∠B ও ∠Cএর মধ্যে একটি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

মনে কর ∠B, ∠C হইতে বৃহত্তর।

এখন, $\angle BEC = \angle A + \frac{1}{2}\angle C$
$\angle BDC = \angle A + \frac{1}{2}\angle B$ (১৬ উপপাদ্য)

∴ ∠BDC, ∠BEC হইতে বৃহত্তর।

কিন্তু, ∠BEC = বিপরীত ∠BFC (BECF, সামান্তরিক)

∴ ∠BDC, ∠BFC হইতে বৃহত্তর। (১)

আবার, ∵ BF = EC = BD

∴ ∠BDF = ∠BFD (২)

∴ (১) হইতে (২) বাদ দিলে, ∠CDF, ∠CFD হইতে বৃহত্তর।

∴ CF, CD হইতে বৃহত্তর, অর্থাৎ BE, CD হইতে বৃহত্তর।

অতএব, △EBC ও △DBCএর

CE = BD

BC = BC

BE, CD হইতে বৃহত্তর (প্রমাণিত)

∴ ∠BCE, ∠CBD হইতে বৃহত্তর; (১৯ক উপপাদ্য)

অর্থাৎ ∠C, ∠B হইতে বৃহত্তর।

কিন্তু, ইহা কল্পনা বিরুদ্ধ;

∴ AB ও AC অসমান হইতে পারে না ; অর্থাৎ, AB = AC।

ই. উ. বি.

৩৯। সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ যে কোন একটি বিন্দু হইতে বাহুত্রয়ের উপর লম্বের সমষ্টি যে কোনও শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের সমান।

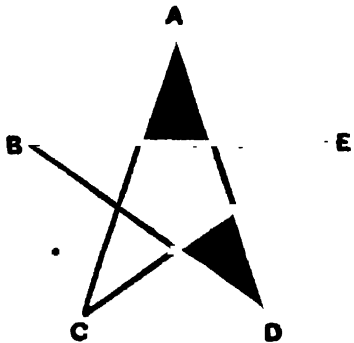
৪০। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের তিন মধ্যমার সমষ্টি ত্রিভুজের পরিসীমার তিন-চতুর্থাংশ হইতে বৃহত্তর।

৪১। ত্রিভুজের শিরঃকোণের দ্বিখণ্ডক, ও ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের বহির্দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

৪২। কোন ত্রিভুজের দুই মধ্যমা পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

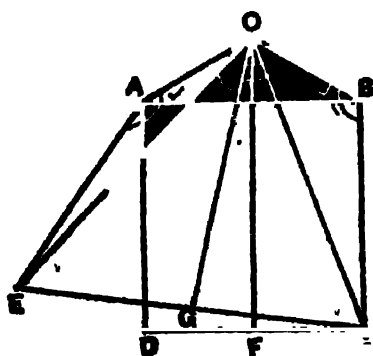
৪৩। কোন ত্রিভুজের তিন মধ্যমা পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

৪৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য অপর এক বাহুর দ্বিগুণ হইলে উহার একটি কোণ 60° হইবে।

৪৫। প্রমাণ কর যে পার্শ্ববর্তী চিত্রের A, B, C, D ও E বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান। (বো. প্র., ১৯৩৬)

৪৬। কোন ঘরের মেজেতে একই প্রকারের সুষম ঋজুরেখ ক্ষেত্রের আকার বিশিষ্ট শ্বেতপাথর বসাইতে হইবে। দেখাও যে উহাদের বাহু সংখ্যা 3, 4 কিংবা 6 হইবে।

৪৭। দুই সুষম ঋজুরেখ ক্ষেত্রের একটির প্রত্যেক কোণ অপরটির প্রত্যেক কোণের দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে উহাদের একটি ষড়্‌ভুজ এবং অপরটি ত্রিভুজ হইবে।

৪৮। কোন ছাত্র নিম্নলিখিত ভাবে প্রমাণ করিল যে স্থূলকোণ সমকোণের সমান। তাহার কোথায় ভুল হইল দেখাও।

প্রমাণ। ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। ∴ ∠BAD = ∠ABC = এক সমকোণ।

স্থূলকোণ BAE অঙ্কিত কর। AE হইতে ABএর সমান করিয়া AE অংশ কাটিয়া লও। EC সংযুক্ত কর। EC ও ABএর মধ্যবিন্দু হইতে যথাক্রমে উহাদের উপর লম্ব অঙ্কিত কর। মনে কর এই লম্বদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল। OA, OE, OC, OB সংযুক্ত কর।

এখন, ∵ O, ABএর মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বের উপর অবস্থিত ;

∴ OA = OB। এইরূপ, OE = OC।

অতএব, △OAE ও △OBCএর

OA = OB, OE = OC, AE = BC ; (অঙ্কন)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম। ∴ ∠OAE = ∠OBC

কিন্তু, ∵ OA = OB ∴ ∠OAB = ∠OBA :

∴ ∠OAE − ∠OAB = ∠OBC − ∠OBA

অর্থাৎ, স্থূলকোণ ∠BAE = সমকোণ ∠ABC।

দ্বিতীয় খণ্ড

ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

১০৬। কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানেব পবিমাণকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** (Area) বলে।

১০৭। **ক্ষেত্রফলের একক**। যে বর্গক্ষেত্রেব বাহু এক ইঞ্চি, তাহাব ক্ষেত্রফলকে এক **বর্গ ইঞ্চি** (Square inch) বলা হয়।

1"

এক বর্গ ইঞ্চি

এইরূপ, এক সেণ্টিমিটর বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে এক **বর্গ সেণ্টিমিটর** (Square centimetre) বলে, ইত্যাদি।

1 সে. মি.

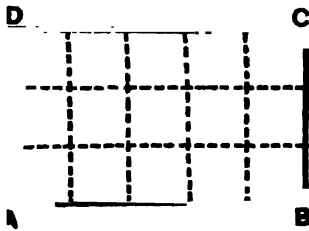
এক বর্গ সেণ্টিমিটর

• দৈর্ঘ্য প্রকাশ করিতে হইলে যেরূপ এক ইঞ্চি, এক ফুট, ইত্যাদি কোন নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে একক লইতে হয়, সেইরূপ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতেও কোন নির্দ্দিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে একক লওয়া হয়।

সাধারণতঃ কোন একক পরিমাণ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকেই একক স্বরূপ গৃহীত হইয়া থাকে। যথা, এক বর্গ ইঞ্চি, এক বর্গ ফুট, এক বর্গ গজ, এক বর্গ সেণ্টিমিটর, ইত্যাদি।

১০৮। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of a rectangle)।

আয়তক্ষেত্রের বৃহত্তর বাহুকে উহার **দৈর্ঘ্য**, ও ক্ষুদ্রতর বাহুকে উহার **প্রস্থ** বা বিস্তার বলে।

মনে কর ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। ইহার দৈর্ঘ্য AB = 5 ইঞ্চি ও প্রস্থ AD = 3 ইঞ্চি। AB ও ADকে যথাক্রমে 5 ও 3 সমান ভাগে বিভক্ত করিলে প্রতি ভাগ এক ইঞ্চি হইবে। এখন, প্রত্যেক বাহুর ভাগবিন্দু হইতে অন্য বাহুর সমান্তরাল করিয়া সরল রেখা টানিলে, আয়তক্ষেত্রটি এমন কয়েকটি বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে যাহাদের প্রত্যেকটির বাহু 1 ইঞ্চি হইবে, অর্থাৎ যাহাদের প্রত্যেকটির কালি 1 বর্গ ইঞ্চি হইবে (পার্শ্বের চিত্র দেখ)। যেহেতু, দৈর্ঘ্যের এক সারিতে 5টি বর্গক্ষেত্র আছে, এবং এইরূপ 3টি সারি আছে; সুতরাং মোট বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা = 5 × 3।

∴ ABCDএর ক্ষেত্রফল = 5 × 3 বা 15 বর্গ ইঞ্চি;

অর্থাৎ, 5 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য ও 3 ইঞ্চি প্রস্থবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 5 × 3 বা 15 বর্গ ইঞ্চি।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে যদি কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে a ও b একক হয়, তাহা হইলে উহার ক্ষেত্রফল = $a \times b$ বা ab বর্গ একক। অতএব, a একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $a \times a$ বা a^2 বর্গ একক।

এই ফল দুইটি সংক্ষেপে নিম্নলিখিতভাবে লিখিত হয়:

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ;

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য)^2।

অনুসিদ্ধান্ত ১। যে সকল আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য সমান এবং প্রস্থও সমান তাহাদের ক্ষেত্রফলগুলিও পরস্পর সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২। যে সকল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান এবং দৈর্ঘ্য (প্রস্থ) পরস্পর সমান, তাহাদের প্রস্থ (দৈর্ঘ্য) পরস্পর সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। যে সকল বর্গক্ষেত্রের বাহু সমান, তাহাদের ক্ষেত্রফলও সমান।

অনুশীলনী ২৯

নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্য ও প্রস্থবিশিষ্ট আযতক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

১। 5″, ·3″ ২। 6″, 2·5″ ৩। 8″, 7·5″

৪। 43·2 সে. মি., 3·4 সে. মি.

৫। 72·12 সে. মি., 37 সে· মি. ৬। 23 গজ, 22·5 গজ।

৭। কোন আযতক্ষেত্রেব কালি 105 বর্গ ইঞ্চি; উহাব দৈর্ঘ্য 35 ইঞ্চি হইলে, প্রস্থ কত ?

৮। কোন আযতক্ষেত্রেব ক্ষেত্রফল 23·5 বর্গ সে. মি.; উহাব প্রস্থ 4·7 সে. মি. হইলে, দৈর্ঘ্য কত ?

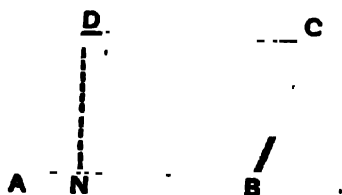
৯। কোন বর্গক্ষেত্রেব বাহু (ক) 2 গজ; (খ) 5 ফুট; (গ) 6 ইঞ্চি; (ঘ) 5·5 সে. মি.; প্রত্যেক স্থলে কালি নির্ণয় কব।

১০। কোন বর্গক্ষেত্রেব ক্ষেত্রফল (ক) 25 বর্গ ইঞ্চি; (খ) 1·44 বর্গ সে. মি.; (গ) 69·4 বর্গ গজ; (ঘ) 99·6004 বর্গ ফুট; প্রত্যেক স্থলে বর্গক্ষেত্রের বাহু নির্ণয় কর।

১১। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1250 বর্গ গজ; উহার দৈর্ঘ্য প্রস্থেব দ্বিগুণ হইলে, দৈর্ঘ্য কত ?

১২। একটি আয়তাকার বাগানেব ভিতরে চারিদিকে 5 ফুট চওড়া একটি রাস্তা আছে। বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 50 ফুট ও 42 ফুট হইলে রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০৯। একটি সামান্তবিক উহাব কোন বাহুর উপর দণ্ডায়মান আছে ধবা হইলে ঐ বাহুকে সামান্তবিকের **ভূমি** (Base) বলা হয়; এবং ভূমি হইতে উহার বিপরীত বাহুর যে কোন বিন্দুর দূরত্বকে সামান্তরিকের **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (Altitude, Height) বলে।

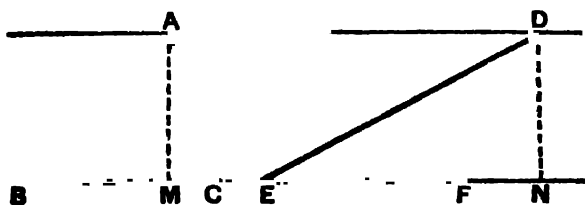
পার্শ্বের চিত্রে ABCD সামান্তরিকের AB বাহুকে ভূমি ধবা হইলে DN (D হইতে ABএর উপর লম্ব) উহার উচ্চতা হইবে।

দ্রষ্টব্য। দুইটি নির্দ্দিষ্ট সমান্তরাল সবল রেখাব একটি হইতে অপবটির বিন্দুগুলিব দূরত্ব পরস্পর সমান।

১১০। ত্রিভুজের কোন বাহুকে ভূমি ধরা হইলে বিপবীত শীর্ষ হইতে ঐ ভূমির উপব লম্বকে ত্রিভুজের **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (Height, Altitude) বলে।

পার্শ্বেব চিত্রে ABC ত্রিভুজের BCকে ভূমি ধরিলে AN (A হইতে BCএর উপর লম্ব) উহার উচ্চতা হইবে।

১ম মন্তব্য। ত্রিভুজের তিন বাহুর যে কোন একটিকে ভূমি ধরা যাইতে পারে। এই হিসাবে কোন ত্রিভুজের তিনটি উচ্চতা হইতে পারে।

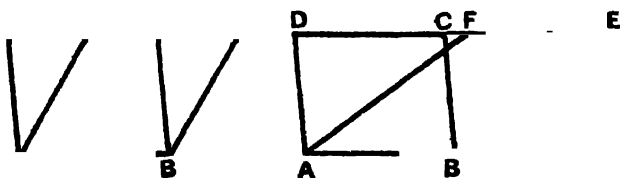
এইরূপ, সামান্তরিকের দুইটি বিভিন্ন উচ্চতা থাকিতে পারে।

২য় মন্তব্য। দুইটি ত্রিভুজ বা দুইটি সামান্তরিক একই সামান্তরাল সরল রেখাদ্বয়েব মধ্যে অবস্থিত হইলে উহাদের উচ্চতা পবস্পর সমান হইবে।

উপরের চিত্রে ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় AD ও BF সমান্তরাল সরল রেখাদ্বযের মধ্যে অবস্থিত আছে ; উহাদের উচ্চতা AM ও DN পরস্পর সমান।

আবার, দুইটি ত্রিভুজ বা দুইটি সামান্তরিকের উচ্চতা সমান হইলে উহাদিগকে দুই সমান্তরাল সবল রেখাব মধ্যে স্থাপিত কবা যাইতে পারে।

উপপাদ্য ২৪

যে সকল সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[Parallelograms on the same base and between the same parallels are equal in area.]

মনে কর ABCD ও ABEF সামান্তরিকদ্বয় AB ভূমির উপর এবং AB ও DE সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD ও ABEFএর ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

প্রমাণ। △ADF ও △BCEএর

AD = বিপরীত বাহু BC

∠ADF = অনুরূপ ∠BCE

∠AFD = অনুরূপ ∠BEC ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

এখন, ABED ক্ষেত্র হইতে যদি △BCE বাদ দেওয়া যায়, তাহা হইলে ABCD সামান্তরিক অবশিষ্ট থাকে ;

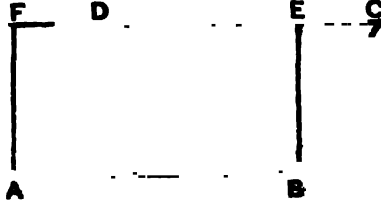
এবং ABED হইতে যদি △ADF বাদ দেওয়া যায়, তাহা হইলে ABEF সামান্তরিক অবশিষ্ট থাকে ;

কিন্তু, এই অবশিষ্ট দুইটি পরস্পর সমান, (৩য় স্বতঃসিদ্ধ)

∴ ABCD ও ABEF সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

ই. উ. বি.

১১১। **সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।**

মনে কর ABCD একটি সামান্তরিক; এবং আয়তক্ষেত্র ABEF, AB ভূমির উপর অঙ্কিত, এবং AB ও CD সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

∴ ১৪০উপপাদ্য অনুসারে সামান্তরিক ABCDএর ক্ষেত্রফল

= ABEF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= AB × AF (১০৮ অনু.)

= সামান্তরিকের ভূমি × উচ্চতা।

অতএব, কোন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উচ্চতার উপর নির্ভর করে; সুতরাং,

সমান সমান ভূমি ও সমান সমান উচ্চতা বিশিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[Parallelograms on equal bases and of equal altitudes are equal in area.]

অনুশীলনী ৩০

১। সামান্তরিকের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে (ক) 5″, 3″; (খ) 3 সে. মি., 2·5 সে. মি.,; (গ) 15·1″, 13·2″; (ঘ) 18·32 সে. মি., 19·79 সে. মি.; প্রত্যেক স্থলে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল 500 বর্গ ইঞ্চি; উহার ভূমি 56 ইঞ্চি হইলে উচ্চতা কত?

৩। কোন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল 1503 বর্গ সে. মি.; উহার উচ্চতা 168 সে. মি. হইলে, ভূমি কত ?

৪। এক সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু ও ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 5", 4" এবং 12·5 বর্গ ইঞ্চি; সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

৫। কোন সামান্তরিকের ভূমি, একটি কর্ণ, ও ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 5·4 সে. মি., 7·5 সে. মি. ও 16·2 বর্গ সে. মি.; সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

৬। এক রম্বসের বাহু ও ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 6·4 সে.মি. ও 20·48 বর্গ সে. মি.। রম্বসটি অঙ্কিত কর।

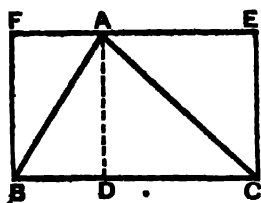
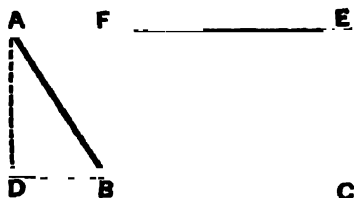
৭। এক সামান্তরিকের কোন বাহুর উপর উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি রম্বস অঙ্কিত কর।

৮। প্রমাণ কর যে একই ভূমির উপর অঙ্কিত এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সামান্তরিকগুলির মধ্যে আয়তক্ষেত্রের পরিসীমাই ক্ষুদ্রতম।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

উপপাদ্য ২৫

কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, সমান ভূমি ও সমান উচ্চতা বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক।

[The area of a traingle is equal to one half of the area of a rectangle on the same base and of the same altitude.]

১ম চিত্র

২য় চিত্র

মনে করে △ABC ও আযতক্ষেত্র BCEF উভযেই BC ভূমিব উপব অবস্থিত, এবং উহাদের উভযেরই উচ্চতা AD।

প্রমাণ করিতে হইবে যে △ABCএব ক্ষেত্রফল BCEFএব ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক।

প্রমাণ। ∵ ∠FBD ও ∠ADC প্রত্যেকে সমকোণ,

∴ BF এবং DA পবস্পব সমান্তরাল।

আব, FA এবং BDও পরস্পব সমান্তবাল, (∵ BCEF, সামান্তবিক);

∴ BDAF একটি আয়তক্ষেত্র, (∵ ∠FBD, এক সমকোণ)

এখন, ∵ AB কর্ণ, BDAF আযতক্ষেত্রটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে;

∴ △BDA, আযতক্ষেত্র BDAFএব অর্দ্ধেক।

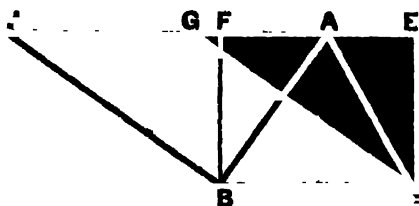
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে △ADC, ADCE আযতক্ষেত্রের অর্দ্ধেক।

∴ (প্রথম চিত্রে যোগ এবং দ্বিতীয চিত্রে বিযোগ করিয়া),

△ABC, BCEF আয়তক্ষেত্রেব অর্দ্ধেক। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজ এবং কোন সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত

হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক হইবে।

[The area of a triangle is half of the area of a parallelogram on the same base and between the same parallels.]

মনে কর △ABC, সামান্তরিক BCGH এবং আয়তক্ষেত্র BCEF, প্রত্যেকেই BC ভূমির উপর এবং BC ও HE সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

∴ △ABCএর ক্ষেত্রফল, আয়তক্ষেত্র BCEFএর ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক। (২৫ উপপাদ্য)

কিন্তু, আয়তক্ষেত্র BCEF ও সামান্তরিক BCGHএর ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। (২৪ উপপাদ্য)

∴ △ABCএর ক্ষেত্রফল, সামান্তরিক BCGHএর ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক।

১১২। **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।** যদি ২৫ উপপাদ্যের চিত্রে BC ও ADএর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও p একক হয়, তবে

△ABCএর **ক্ষেত্রফল** = আয়তক্ষেত্র BCEFএর ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক

$= \frac{1}{2} ap$ বর্গ একক।

ইহা নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা যাইতে পারে ;

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ½. ভূমি × উচ্চতা।

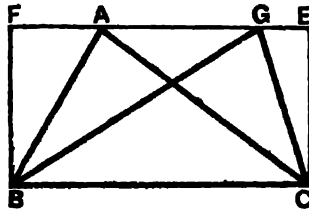
অতএব, কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উহার ভূমি ও উচ্চতার উপর নির্ভর করে ; সুতরাং,

সমান সমান ভূমি ও সমান সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[Triangles on equal bases and of equal altitudes are equal in area.]

উপপাদ্য ২৬

যে সকল ত্রিভুজ একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, তাহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[Triangles on the same base and between the same parallels are equal in area.]

মনে কর △ABC ও △GBC উভয়েই BC ভূমির উপর এবং BC ও FE সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABC ও GBC ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

প্রমাণ। মনে কর BCEF আয়তক্ষেত্র, BC ভূমির উপর, এবং BC ও FE সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

∴ △ABCএর ক্ষেত্রফল, BCEFএর ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক

এবং △GBCএর ক্ষেত্রফল, BCEF এর ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক

(২৫ উপপাদ্য)

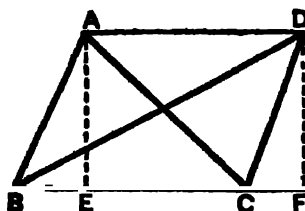
∴ △ABC ও △GBCএর ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

ই. উ. বি.

মন্তব্য। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, দুইটি ত্রিভুজ সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে তাহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

উপপাদ্য ২৭

একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান হইলে উহারা একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

[Equal triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels .]

মনে কর ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান ; এবং উহারা উভয়েই BC ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত।

AD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AD ও BC পরস্পর সমান্তরাল।

মনে কর AE ও DF যথাক্রমে $\triangle$ABC ও $\triangle$DBCএর উচ্চতা।

প্রমাণ। $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AE$

এবং $\triangle DBC = \frac{1}{2} BC \times DF$

$\therefore \frac{1}{2} BC \times AE = \frac{1}{2} BC \times DF$

$\therefore AE = DF$।

কিন্তু, AE ও DF উভয়েই BCএর উপর লম্ব বলিয়া, উহারা পরস্পর সমান্তরাল ;

$\therefore$ AE ও DF পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল ;

$\therefore$ AD ও EF অর্থাৎ BC পরস্পর সমান্তরাল। (২১ উপপাদ্য)

ই. উ. বি

অনুশীলনী ৩১

১। কোন ত্রিভুজেব ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে (ক) 3", 2"; (খ) 3·5 সে. মি., 2·8 সে. মি.; (গ) 7·5", 3·56", প্রত্যেক স্থলে ত্রিভুজের কালি নির্ণয কব।

২। কোন ত্রিভুজের ভূমি 7·5" ও ক্ষেত্রফল 22·5 বর্গ ইঞ্চি; উহাব উচ্চতা নির্ণয কব।

৩। কোন ত্রিভুজেব ক্ষেত্রফল 22·5 বর্গ সে.মি. ও উচ্চতা 5·5 সে. মি.; উহাব ভূমির দৈর্ঘ্য কত ?

৪। কোন ত্রিভুজেব ভূমি, অপব এক বাহু ও ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 7", 5" ও $1\frac{1}{2}$ বর্গ ইঞ্চি, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। কোন ত্রিভুজেব ভূমি, ভূমিসংলগ্ন এক কোণ, ও ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 5 সে. মি., 30° ও 20 বর্গ সে. মি.; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৬। ABC ত্রিভুজের ভূমি BC একটি নির্দ্দিষ্ট সরল বেখা। BCএর দৈর্ঘ্য 8 সে. মি. ও △ABCএব ক্ষেত্রফল 12 বর্গ সে. মি. হইলে, Aএব সঞ্চারপথ নির্ণয কব।

*৭। প্রমাণ কর যে ত্রিভুজেব যে কোনও মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত কবে।

*৮। যদি এক ত্রিভুজেব দুই বাহু যথাক্রমে অন্য এক ত্রিভুজের দুই বাহুর সমান হয এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূবক হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পব সমান হইবে।

৯। ABC ত্রিভুজেব BC বাহুব উপব D বিন্দু লওয়া হইল। যদি BD = $\frac{1}{4}$ BC হয, প্রমাণ কব যে △ABD = $\frac{1}{4}$ △ABC।

১০। যদি দুই ত্রিভুজেব উচ্চতা সমান হয়, কিন্তু ভূমি অসমান হয, তবে বৃহত্তর ভূমিবিশিষ্ট ত্রিভুজেব ক্ষেত্রফলও বৃহত্তব হইবে।

(ক. প্র., ১৯১২)

১১। কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর উহার সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

১২। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর উহার সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার শীর্ষ কোন নির্দ্দিষ্ট সরল বেখার উপর থাকিবে।

১৩। P, ABC ত্রিভুজের অন্তর্গত একটি বিন্দু। যদি △PAB ও △PACএর ক্ষেত্রফল সমান, হয়, তবে Pএর সঞ্চারপথ নির্ণয় কব।

[সঙ্কেত। APএব উপব B ও C হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয় পরস্পব সমান ; ইহা দ্বাবা প্রমাণ কর যে AP বর্দ্ধিত হইলে উহা BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।]

১৪। কোন চতুর্ভুজেব কর্ণদ্বয় উহাকে চারিটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত কবিলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে।

১৫। কোন সামান্তরিকেব কর্ণদ্বয় উহাকে চাবিটি সমক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে। (ক. প্র., ১৯১৫ ; ঢা. প্র., ১৯৩৫)

১৬। ABCD একটি সামান্তবিক, এবং O, উহাব অন্তর্গত কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে AOB এবং COD ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলেব অর্দ্ধেক। (ক. প্র., ১৯৩০)

*১৭। ২৭শ উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখা অবশিষ্ট বাহুর সহিত সমান্তবাল।

(ঢা. প্র. ১৯৩৩ ; ক. প্র., ১৯৩৪)

১৮। ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ BD কর্ণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ কর যে AC, ঐ চতুর্ভুজকে দুই সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করিবে। (বো. প্র., ১৯২৪)

১৯। যদি কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণ উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে ঐ কর্ণ অন্য কর্ণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। (বো. প্র., ১৯২০)

২০। △ABC এবং △DBC, BC ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত, এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট। যদি △ABC সমদ্বিবাহু হয়; তবে প্রমাণ কর যে △ABCএর পরিসীমা △DBCএর পরিসীমা হইতে ক্ষুদ্রতর। (বো. প্র., ১৯২০)

২১। ABCD একটি সামান্তরিক। BC ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E এবং F হইলে AEF ত্রিভুটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলেব $\frac{3}{8}$ অংশ হইবে। (বো. প্র., ১৯২৫)

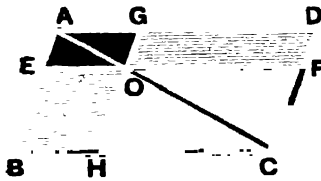
২২। ABC ত্রিভুজের AB বাহুব P বিন্দু হইতে BCএর সমান ও সমান্তরাল কবিযা PQR সরল বেখা টানা হইল। ঐ সরল বেখাটি ACকে Q বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে △AQR ও △BPQএর ক্ষেত্রফল পরস্পব সমান হইবে। (বো. প্র., ১৯২২)

২৩। R, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু; P, ACএর উপর যে কোনও একটি বিন্দু। BPকে S বিন্দু পর্য্যন্ত এরূপভাবে বর্দ্ধিত কবা হইল যেন △RPS, △RCPএর সমান হয়। প্রমাণ কব যে SC এবং AB সমান্তরাল। (বো প্র., ১৯৩২)

২৪। প্রমাণ কর যে কোন নির্দ্দিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ যে কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুত্রযের উপব অঙ্কিত লম্বের সমষ্টি সর্ব্বাবস্থায সমান হইবে।

*২৫। একটি সামান্তরিকের ভূমি ও ক্ষেত্রফল নির্দ্দিষ্ট থাকিলে কর্ণদ্বযের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*২৬। ABCD একটি নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজ। যদি ABCP চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ABCD এর সমান হয়, তবে P বিন্দুব সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*২৭। ABCD একটি সামান্তবিক ও AC উহার কর্ণ। ACএর যে কোন বিন্দু O দিযা AD ও ABএব সমান্তবাল করিযা যথাক্রমে EF ও GH সরল রেখাদ্বয় টানা হইল। প্রমাণ কর যে সামান্তরিক EBHO ও সামান্তরিক GOFDএর ক্ষেত্রফল পরস্পব সমান।

[সঙ্কেত : AC, AO, OC কর্ণত্রয় যথাক্রমে ABCD, AEOG এবং OHCF সামান্তরিক তিনটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

২৮। কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া থাকিলে দেখাও যে কর্ণদ্বয় যে-কোন বিন্দুতে ছেদ করুক না কেন চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল একইরূপ থাকিবে।

[সঙ্কেত : চতুর্ভুজের শীর্ষগুলি হইতে কর্ণের সমান্তরাল সরল রেখা টানিলে একটি নির্দ্দিষ্ট বাহু ও কোণযুক্ত সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে যাহার ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজটির দ্বিগুণ।]

১১৩। চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল।

মনে কর ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে। B ও D হইতে AC কর্ণের উপর যথাক্রমে BM ও DN লম্ব অঙ্কিত কর।

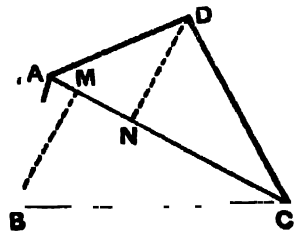
মনে কর, AC $= a$ একক ; BM $= p$ একক ; DN $= q$ একক।

এখন, ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \triangle ABC + \triangle ADC$

$= \frac{1}{2}$ AC.BM $+ \frac{1}{2}$ AC.DN

$= \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}aq = \frac{1}{2}a\,(p+q)$।

অর্থাৎ, চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ কর্ণ × (কর্ণের উপর বিপরীত শীর্ষদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি)।

মন্তব্য ১। ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিলে

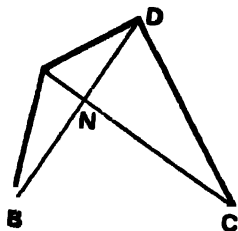
চতুর্ভুজের কালি

$= \frac{1}{2}$ AC. (BN + DN)

$= \frac{1}{2}$ AC. BD $= \frac{1}{2}$ কর্ণ × কর্ণ।

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে ;

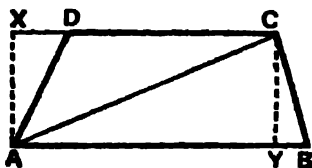
∴ **রম্বসের ক্ষেত্রফল**

$= \frac{1}{2}$ **কর্ণ × কর্ণ।**

মন্তব্য ২। B ও D হইতে ACএর উপর লম্বগুলিকে **অফ্‌সেট** (Offsets) বলা হয়।

১১৪। **ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল।**

মনে কর ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম ; এবং ইহার AB ও CD বাহুদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

ABCDএর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

AC সংযুক্ত কর।

A হইতে CDএর উপর AX, এবং C হইতে ABএর উপর CY লম্ব অঙ্কিত কর।

এখন, ABCDএর ক্ষেত্রফল $= \triangle ABC + \triangle ADC$

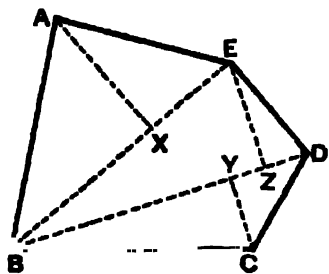
$= \frac{1}{2}$ AB.CY $+ \frac{1}{2}$ CD.AX

$= \frac{1}{2}$(AB + CD). AX, [∵ AX = CY]

অর্থাৎ, **ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল**

$= \frac{1}{2}$. **সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি × উচ্চতা।**

১১৫। বহুভুজের ক্ষেত্রফল।

প্রথম প্রণালী।

মনে কর ABCDE বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে। বহুভুজটিকে কর্ণ দ্বারা কতকগুলি ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়া কালি নির্ণয় করা যায়। ইহাকে **ত্রিভুজীকরণ প্রণালী** (Method of triangulation) বলে।

যথা, উপরের চিত্রে,

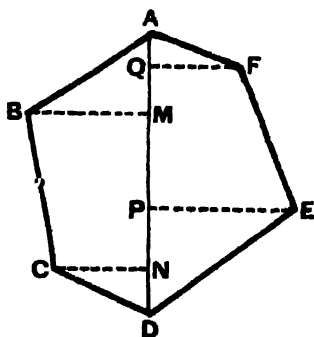
$$ABCDE = \triangle ABE + \triangle BED + \triangle BDC$$
$$= \tfrac{1}{2}\, BE.AX + \tfrac{1}{2}\, BD.EZ + \tfrac{1}{2}\, BD.CY \text{।}$$

দ্বিতীয় প্রণালী

(ভূমি জরিপ কবিবার প্রণালী)

ভূমি জরিপ করিতে আমিনেরা নিম্নলিখিত পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয করে।

মনে কর ABCDEFএব ক্ষেত্রফল নির্ণয করিতে হইবে।

AD কর্ণ টান, এবং ADএব উপর যথাক্রমে BM, CN, EP ও FQ লম্ব অঙ্কিত কর*। এই লম্বগুলি ও AD দ্বারা বহুভুজটি কতকগুলি সমকোণী ত্রিভুজ ও সমকোণযুক্ত ট্রাপিজিয়মে বিভক্ত হইল। বহু-ভুজের কালি হইবে এই ত্রিভুজ ও ট্রাপিজিয়মগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি।

*B, C, E, F হইতে ADএর উপর অঙ্কিত লম্বগুলিকে অফ্‌সেট (Offset) বলে। যথা, উপরের চিত্রে BM, CN, EP, FQ অফসেট।

বহুভুজের মাপগুলি আমিনের ফীল্ডবুকে* নিম্নলিখিত ভাবে লিখিত হয়ঃ

	গজ	
	A পর্য্যন্ত	
	100	
	90	F পর্য্যন্ত 30
B পর্য্যন্ত 20	60	
	20	E পর্য্যন্ত 40
C পর্য্যন্ত 16	8	
	D হইতে	

অর্থাৎ

	গজ		
	DA	100	
	DQ	90	QF = 30
MB = 20	DM	60	
	DP	20	PE = 40
NC = 16	DN	8	

$\triangle$ DNC $= \frac{1}{2}$ DN. NC $= \frac{8 \times 16}{2} =$ 64 বর্গগজ

$\triangle$ DPE $= \frac{1}{2}$ DP. PE $= \frac{20 \times 40}{2} =$ 400

ট্রাপিজিয়ম PEFQ $= \frac{1}{2}$ (PE + QF). PQ $= \frac{70 \times 70}{2} =$ 2450 „

ট্রাপিজিয়ম NCBM $= \frac{1}{2}$ (NC + MB). NM $= \frac{36 \times 52}{2} =$ 936 „

$\triangle$ MBA $= \frac{1}{2}$ AM. MB $= \frac{40 \times 20}{2} =$ 400 „

$\triangle$ AQF $= \frac{1}{2}$ AQ. QF $= \frac{10 \times 30}{2} =$ 150 „

∴ (যোগ করিয়া) ABCDEFএর ক্ষেত্রফল $=$ 4400 বর্গগজ

* আমিনেরা যে পুস্তকে ভূমির মাপের পরিমাণগুলি লিখিয়া রাখে, তাহার নাম **ফীল্ডবুক** (Field Book) বা **চিঠা**।

অনুশীলনী ৩২

১। রম্বসের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে (ক) 20 গজ, 16 গজ ; (খ) 18 সে.মি., 16 সে. মি. ; (গ) 15·7″, 19·8″ ; প্রত্যেক স্থলে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয় ও উন্নতি যথাক্রমে (ক) 20″, 10″, 6″ ; (খ) 18 সে. মি., 12 সে. মি., 5 সে. মি. ; (গ) 20 গজ, 10·2 গজ, 13·8 গজ ; প্রত্যেকস্থলে, ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩। চতুর্ভুজের এক কর্ণ ও উহা হইতে বিপরীত শীর্ষদ্বয়ের দূরত্ব যথাক্রমে (ক) 30″, 40″, 10″, (খ) 50·2 সে. মি., 40·8 সে. মি., 30·2 সে. মি. ; (গ) 102·6 গজ, 90 গজ, 70 গজ ; প্রত্যেকস্থলে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৪। ABCD চতুর্ভুজের কালি 1440 বর্গ গজ ; BC হইতে A ও D এর দূরত্ব 40 ও 50 গজ হইলে, BCএর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৫। একটি রম্বসের ক্ষেত্রফল 576 বর্গ ফুট ; উহার একটি কর্ণ 36 ফুট হইলে অন্যটি কত ?

৬। একটি চতুর্ভুজের কর্ণ 16″। উহার একটি অফ্‌সেট 20″ এবং ক্ষেত্রফল 402 বর্গ ইঞ্চি হইলে অপর অফ্‌সেটটি নির্ণয় কর।

কোন আমিনের ফীল্ড-বুক হইতে কয়েকটি ভূমির নিম্নলিখিত মাপ পাওয়া গেল। প্রত্যেক ভূমির একটি নক্সা প্রস্তুত কর এবং কালি নির্ণয় কর।

৭। গজ

	A পর্য্যন্ত	
	70	
B পর্য্যন্ত 50	40	
	20	D পর্য্যন্ত 15
	C হইতে	

৮। মিটর

	D পর্য্যন্ত	
	70	
	55	C পর্য্যন্ত 40
	40	B পর্য্যন্ত 50
E পর্য্যন্ত 15	20	
	A হইতে	

গজ

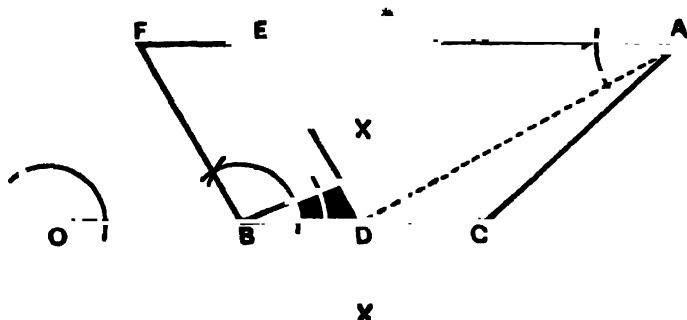
	D পর্য্যন্ত	
	88	
E পর্য্যন্ত 50	70	
	45	C পর্য্যন্ত 40
F পর্য্যন্ত 28	25	
	15	B পর্য্যন্ত 20
	A হইতে	

১০। লিঙ্ক

	E পর্য্যন্ত	
	100	
F পর্য্যন্ত 40	72	
	48	D পর্য্যন্ত 30
G পর্য্যন্ত 25	20	
H পর্য্যন্ত 36	15	C পর্য্যন্ত 24
	10	B পর্য্যন্ত 20
	A হইতে	

সম্পাদ্য ১৮

এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং যাহার এক কোণ একটি নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান।

[To construct a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle.]

মনে কর ABC একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ, এবং ∠O, একটি নির্দ্দিষ্ট কোণ। এরূপ এক সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল △ABCএর সমান, এবং যাহার এক কোণ, ∠Oএর সমান।

অঙ্কন। B বিন্দুতে ∠Oএর সমান করিয়া ∠CBF অঙ্কিত কর।

A বিন্দু হইতে CBএর সমান্তরাল করিয়া AE সরল রেখা টান।

AE যেন BFকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। BCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। এখন FA হইতে BDএর সমান করিয়া FE অংশ কাটিয়া লও, এবং ED সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, BDEF নির্ণেয় সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ। AD সংযুক্ত কর।

∵ BD এবং FE পরস্পর সমান ও সমান্তরাল,

∴ BDEF একটি সামান্তরিক।

△ABD ও সামান্তরিক BDEF উভয়েই BD ভূমির উপর, এবং সমান্তরাল সরল রেখা BC ও FAএর মধ্যে অবস্থিত ;

∴ সামান্তরিক BDEF = 2△ABD, (২৫ উপ., অনুসিদ্ধান্ত)

△ABD ও △ACDএর ভূমি BD ও CD পরস্পর সমান, এবং ইহাদের উন্নতি একই ;

∴ △ABD = △ACD

∴ △ABC = 2△ABD

∴ সামান্তরিক BDEF = △ABC

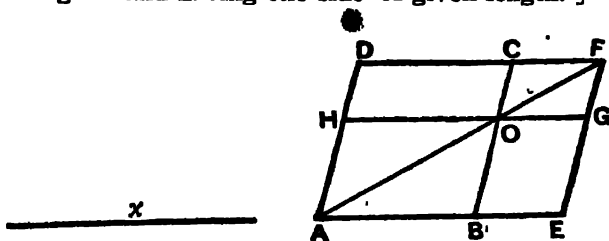
এবং ইহার ∠DBF = ∠O ;

অতএব, BDEFই নির্ণেয় সামান্তরিক। ই. স. বি.

মন্তব্য। নির্দিষ্ট কোণটি এক সমকোণ হইলে অঙ্কিত সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। অতএব, কোন ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র উক্ত প্রণালীতে অঙ্কিত করা যাইবে।

সম্পাদ্য ১৯

এমন এক সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দ্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান এবং যাহার একবাহু একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান।

[To construct a parallelogram equal in area to a given parallelogram and having one side of given length.]

মনে কর ABCD একটি সামান্তরিক; এবং x, একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা।

এরূপ এক সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল ABCDএর সমান এবং যাহার এক বাহু x এর সমান।

অঙ্কন। AB কিংবা বর্দ্ধিত AB হইতে x এর সমান করিয়া AE অংশ কাটিয়া লও এবং E বিন্দু হইতে ADএর সমান্তরাল করিয়া EF সরল রেখা টান। ইহা যেন DCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। AF সংযুক্ত কর। মনে কর AF, BCকে (কিংবা বর্দ্ধিত BCকে) O বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, O বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল HG সরল রেখা অঙ্কিত কর; ইহা যেন AD ও EFকে যথাক্রমে H ও G বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, AEGHই নির্ণেয় সামান্তরিক হইবে।

প্রমাণ। ∵ কর্ণ AF, সামান্তরিক AEFDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে,

∴ △AEF = △ADF।

এইরূপ, △ABO = △AHO

এবং △OGF = △OCF।

∴ △AEF − △ABO − △OGF

= △ADF − △AHO − △OCF

অর্থাৎ, সামান্তরিক BEGO = সামান্তরিক HOCD।

উভয় পক্ষে সামান্তরিক ABOH যোগ করিলে,

সামান্তরিক AEGH = সামান্তরিক ABCD ;

এবং AEGH সামান্তরিকের AE বাহু x এর সমান।

∴ AEGHই নির্ণেয় সামান্তরিক। ই. স. বি.

মন্তব্য। অঙ্কিত সামান্তরিকের কোণগুলি প্রদত্ত সামান্তরিকের কোণের সমান।

দ্রষ্টব্য। ১৯ সম্পাদ্যোক্ত অঙ্কনের অন্য একটি নিয়ম নিম্নের অনুশীলনীর ৩য় প্রশ্নে দেওয়া হইল।

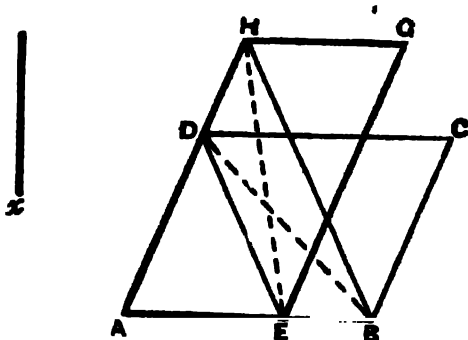
অনুশীলনী ৩৩

১। একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এক আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

২। কোন নির্দ্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি নির্দ্দিষ্ট বাহু বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর। (সম্পাদ্য ১৯)

৩। প্রমাণ কর যে ১৯ সম্পাদ্যের অঙ্কন নিম্নলিখিত ভাবেও সম্পন্ন করা যায় :

মনে কর ABCD সামান্তরিকের সমান করিয়া এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার এক বাহু কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা x এর সমান হইবে।

অঙ্কন। AB কিংবা বর্দ্ধিত AB হইতে x এর সমান করিয়া AE অংশ কাটিয়া লও। ED সংযুক্ত কর, এবং B বিন্দু হইতে EDএর সমান্তরাল করিয়া BH সরল রেখা অঙ্কিত কর। BH যেন ADকে H বিন্দুতে ছেদ

করিল। এখন E ও H হইতে যথাক্রমে AH ও AEএর সমান্তরাল করিয়া দুইটি সরল রেখা অঙ্কিত কর। এই সরল রেখাদ্বয় যেন পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, AEGH নির্ণেয় সামান্তরিক হইবে।

[BD ও EH সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে

$\triangle BHE = \triangle BHD$, $\therefore$ $\triangle AHE = \triangle ABD$

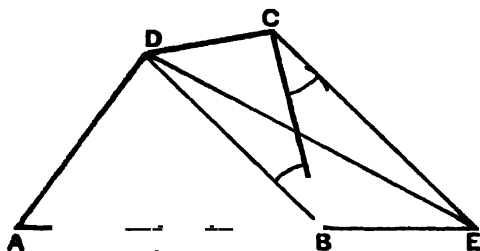
$\therefore$ সামান্তরিক AEGH = সামান্তরিক ABCD।]

৪। এমন এক সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দ্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান হইবে এবং যাহার সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য দুইটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হইবে।

[সঙ্কেত : মনে কর ABCD সামান্তরিকের সমান এবং দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা x ও y এর সমান সন্নিহিত বাহু বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে। মনে কর $x > y$। প্রথমতঃ একটি বাহু xএর এবং ক্ষেত্রফল ABCDএর সমান করিয়া AEGH সামান্তরিক অঙ্কিত কর, (১৯ সম্পাদ্যের চিত্র দেখ)। এখন Aকে কেন্দ্র করিয়া y এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর, মনে কর ইহা HGকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন E হইতে APএর সমান্তরাল করিয়া EQ সরল রেখা টান; ইহা যেন HG বা বর্দ্ধিত HGকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে APQE নির্ণেয় সামান্তরিক।]

সম্পাদ্য ২০

কোন নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle equal in area to a given quadrilateral.]

মনে কর ABCD একটি নির্দ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল ABCDএর সমান।

অঙ্কন। BD সংযুক্ত কর, এবং C বিন্দু হইতে DBএর সমান্তরাল করিয়া CE সরল রেখা অঙ্কিত কর। মনে কর ইহা ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। DE সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, △ADEই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। ∵ △DBE ও △DBC উভয়েই DB ভূমির উপর, এবং DB ও CE সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত,

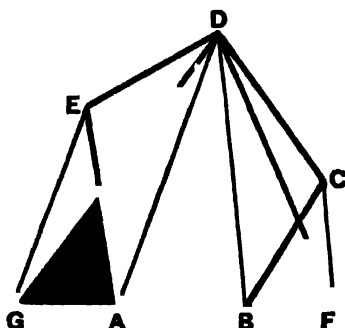
∴ △DBE = △DBC।

উভয়পক্ষে △ABD যোগ করিলে

△ADE = চতুর্ভুজ ABCD। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ২০ (ক)

কোন নির্দ্দিষ্ট বহুভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a triangle equal in area to a given rectilineal figure.]

মনে কর ABCDE একটি নির্দ্দিষ্ট বহুভুজ। ইহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AD ও BD সংযুক্ত কর, এবং C ও E বিন্দু দিয়া যথাক্রমে DB ও DAএর সমান্তরাল করিয়া CF ও EG সরল রেখা টান। ইহারা যেন ABকে F ও G বিন্দুতে ছেদ করিল। DF ও DG সংযুক্ত কর।

প্রমাণ কর যে DFGই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

মন্তব্য ১। এস্থলে, **পঞ্চভুজ** ABCDE = **চতুর্ভুজ** BCDG
= **ত্রিভুজ** DGF।

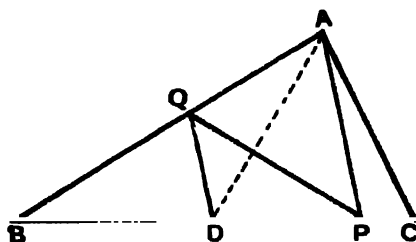
এইরূপে, যে কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান করিয়া ক্রমশঃ অল্পতর সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট ক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

মন্তব্য ২। যে কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি নির্দ্দিষ্ট কোণ বিশিষ্ট সামান্তরিক অঙ্কিত করা যায়।

কারণ, প্রথমে ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া পরে ১৮শ সম্পাদ্য অনুসারে উল্লিখিত অঙ্কন করা যাইবে।

সম্পাদ্য ২১

ত্রিভুজের যে কোন বাহুর একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরল রেখা দ্বারা ঐ ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a triangle by a straight line drawn through a given point in one of its sides.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ ; এবং P, BCএর যে কোন একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। P বিন্দু দিয়া এমন একটি সরল রেখা টানিতে হইবে যাহা △ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

অঙ্কন। AP সংযুক্ত কর। এখন, BCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর ; এবং, D বিন্দু হইতে PA সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া DQ সরল রেখা টান। মনে কর DQ, ABকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ সংযুক্ত কর।

[illegible]

প্রমাণ। AD সংযুক্ত কর।

△PDQ ও △ADQ উভয়েই DQ ভূমির উপর, ও PA এবং DQ সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ △PDQ = △ADQ।

উভয়পক্ষে △BDQ যোগ করিলে,

△BPQ = △ABD।

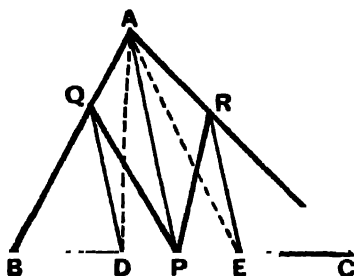
কিন্তু, △ABD = $\frac{1}{2}$ △ABC, ($\because$ BD = $\frac{1}{2}$ BC)

$\therefore$ △BPQ = $\frac{1}{2}$ △ABC।

অতএব, PQ সরল রেখা △ABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। ই.স.বি.

সম্পাদ্য ২২

ত্রিভুজের যে কোন বাহুর একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরল রেখা দ্বারা ঐ ত্রিভুজটিকে সমান তিন অংশে ভাগ করিতে হইবে।

[To trisect a triangle by straight lines drawn from a given point in one of its sides.]

মনে কর ABC একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ; এবং P, BC বাহুর একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু।

P হইতে সরল রেখা টানিয়া △ABCকে সমান তিন অংশে ভাগ করিতে হইবে।

অঙ্কন। BC বাহুকে D ও E বিন্দুতে সমান তিন অংশে ভাগ কর (১২ সম্পাদ্য)। AP সংযুক্ত কর; এবং D ও E বিন্দু হইতে PAএর সমান্তরাল করিয়া DQ ও ER সরল রেখা অঙ্কিত কর। ইহারা যেন AB এবং ACকে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, PQ ও PR সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে PQ ও PR, $\triangle ABC$কে সমান তিন অংশে ভাগ করিবে।

প্রমাণ। AD ও AE সংযুক্ত কর। এখন, $\triangle PDQ$ ও $\triangle ADQ$ উভয়েই DQ ভূমির উপর এবং DQ ও PA সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \triangle PDQ = \triangle ADQ$।

উভয়পক্ষে $\triangle BDQ$ যোগ করিলে,

$\triangle BPQ = \triangle ABD$।

কিন্তু, $BD = \frac{1}{3} BC$; এবং $\triangle ABD$ ও $\triangle ABC$এর উচ্চতা সমান;

$\therefore \quad \triangle ABD = \frac{1}{3} \triangle ABC$;

$\therefore \quad \triangle BPQ = \frac{1}{3} \triangle ABC$;

এইরূপ, $\triangle CPR = \frac{1}{3} \triangle ABC$;

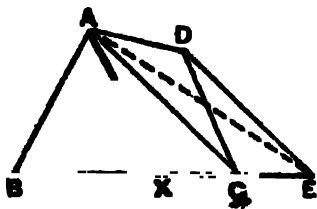
$\therefore$ PQ ও PR, $\triangle ABC$কে সমান তিন অংশে ভাগ করিল।

ই. স. বি.

অনুশীলনী ৩৪

***১। এক চতুর্ভুজের শীর্ষ হইতে সরল রেখা টানিয়া উহাকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত কর।** (ক. প্র., ১৯৩৪, ১৯৩৭)

মনে কর A বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

প্রথম প্রণালী

অঙ্কন। মনে কর $\triangle ABC > \triangle ADC$। D হইতে ACএর সমান্তরাল করিয়া DE সরল রেখা টান। ইহা যেন বর্দ্ধিত BCকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। X, BEএর মধ্যবিন্দু হইলে AXই নির্ণেয় সরল রেখা।

প্রমাণ। AE যুক্ত কর।

$\because$ $\triangle ACE$ এবং $\triangle ACD$ উভয়েই AC ভূমির উপর, এবং AC ও DE সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত,

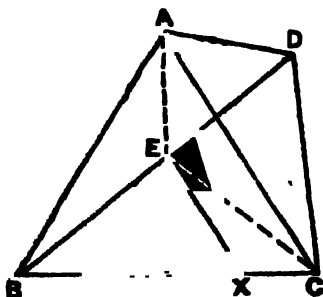
$\therefore \quad \triangle ACE = \triangle ACD$।

উভয় পক্ষে $\triangle ACB$ যোগ করিলে, $\triangle ABE =$ চতুর্ভুজ ABCD।

এখন, $\because$ $BX = \frac{1}{2} BE$; $\therefore$ $\triangle ABX = \frac{1}{2} \triangle ABE = \frac{1}{2}$ ABCD।

অর্থাৎ AX, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

দ্বিতীয় প্রণালী

অঙ্কন। মনে কর $\triangle ABC > \triangle ADC$। BDএর মধ্যবিন্দু E হইতে ACএর সমান্তরাল করিয়া EX সরল রেখা অঙ্কিত কর। EX ও BC X বিন্দুতে মিলিত হইলে AX, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। EA, EC সংযুক্ত কর।

$\because \quad BE = ED,$

$\therefore \quad \triangle AED = \frac{1}{2} \triangle ABD$।

এইরূপ $\quad \triangle CED = \frac{1}{2} \triangle CBD$।

$\therefore$ AECD ক্ষেত্র $= \frac{1}{2}$ ABCD চতুর্ভুজ।

এখন $\triangle XCA$ এবং $\triangle ECA$ উভয়েই CA ভূমির এবং CA ও XE মান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। $\therefore$ $\triangle XCA = \triangle ECA$।

উভয় পক্ষে $\triangle DCA$ যোগ করিলে, চতুর্ভুজ AXCD = AECD ক্ষেত্র
$= \frac{1}{2}$ ABCD।

অর্থাৎ AX, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

*২। কোন বর্গক্ষেত্রের শীর্ষ হইতে সরল রেখা টানিয়া উহাকে সমান তিন ভাগে ভাগ কর।

*৩। একটি নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৪। কোন ত্রিভুজের এক বাহু, বাহুসংলগ্ন এক কোণ, এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ দেওয়া আছে; পূর্ব্বোক্ত ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। কোন ত্রিভুজের শীর্ষ দিয়া অঙ্কিত সরল রেখা দ্বারা উহাকে যে কোন সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত কর।

*৬। সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া ঐ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

[সঙ্কেত: সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে কোন সরল রেখা ঐ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

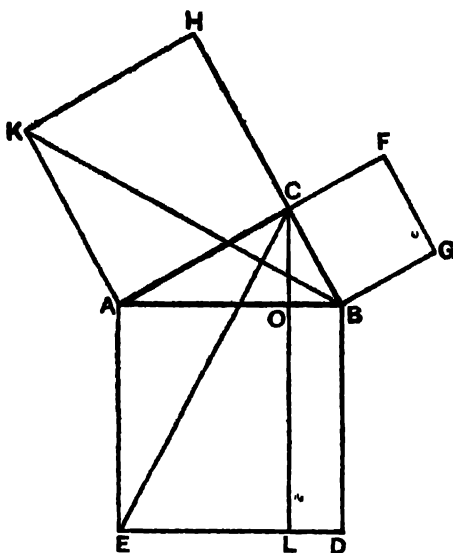
৭। একটি নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান হইবে এবং যাহার এক কোণ কোন নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

৮। চতুর্ভুজের কোন শীর্ষ হইতে একটি সরল রেখা অঙ্কিত করিয়া উহার $\frac{1}{3}$ অংশ কাটিয়া লও। [১ম উদা., অঙ্কনের প্রথম প্রণালী দ্রষ্টব্য।]

৯। চতুর্ভুজের যে কোন বাহুর একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া ঐ চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

উপপাদ্য ২৮

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

[The square on the hypotenuse of a right-angled triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides.]

মনে কর $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ, এবং AB ইহার অতিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র AC ও BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

AB, BC ও CA বাহুর উপর যথাক্রমে ABDE, BCFG ও CAKH বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। C বিন্দু হইতে AE বা BDএর সমান্তরাল করিয়া CL টান ; ইহা যেন AB ও EDকে O এবং L বিন্দুতে ছেদ করিল।

BK, CE সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∵ $\angle ACB$ ও $\angle ACH$, প্রত্যেকে এক সমকোণ,

∴ BC ও CH একই সরল রেখায় অবস্থিত।

এখন, $\angle EAB = \angle KAC$, (∵ প্রত্যেকে এক সমকোণ)।

উভয়পক্ষে $\angle BAC$ যোগ করিলে, $\angle EAC = \angle KAB$ ।

তাহা হইলে, $\triangle EAC$ ও $\triangle KAB$এর

$EA = AB$

$AC = KA$

এবং অন্তর্ভূত $\angle EAC =$ অন্তর্ভূত $\angle KAB$ ।

∴ $\triangle EAC = \triangle KAB$ ।

এখন, আয়তক্ষেত্র EAOL এবং $\triangle EAC$ উভয়েই EA ভূমির উপর, এবং CL ও AE সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ;

∴ আয়তক্ষেত্র EAOL $= 2\triangle EAC$ ।

আবার, ∵ বর্গক্ষেত্র KACH ও $\triangle KAB$ উভয়েই KA ভূমির উপর, এবং KA ও HB সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ;

∴ বর্গক্ষেত্র KACH $= 2\ \triangle KAB$ ।

∴ আয়তক্ষেত্র EAOL = বর্গক্ষেত্র KACH ।

এইরূপ, CD ও AG সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যাইতে পারে যে

আয়তক্ষেত্র DBOL = বর্গক্ষেত্র BCFG ।

কিন্তু, আয়তক্ষেত্র EAOL + আয়তক্ষেত্র DBOL = বর্গক্ষেত্র ABDE ;

∴ বর্গক্ষেত্র ABDE = বর্গক্ষেত্র KACH + বর্গক্ষেত্র BCFG ।

অর্থাৎ, ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র AC ও BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান। ই. উ. বি.

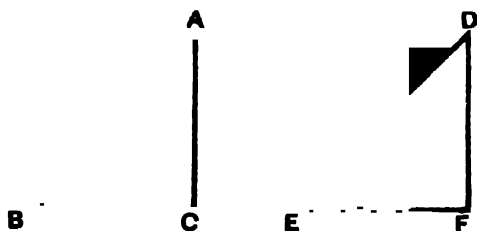
মন্তব্য ১। ২৮শ উপপাদ্যকে পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Theorem of Pythagoras) বলে।

মন্তব্য ২। 'ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র'কে সংক্ষেপে 'AB^2' এইরূপ লিখিত হয়, ইত্যাদি। অতএব, ২৮শ উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত নিম্ন-লিখিত ভাবেও প্রকাশ করা যায় :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{।}$$

উপপাদ্য ২৯

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে ত্রিভুজটির শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ সমকোণ হইবে।

[If the square on one side of a triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides, the angle contained by these two sides is a right angle.]

মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ; এবং ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র BC ও CAএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ACB = এক সমকোণ।

BCএর সমান করিয়া EF সরল রেখা অঙ্কিত কর।

EFএর উপর FD লম্ব টান এবং FD হইতে ACএর সমান করিয়া FD অংশ কাটিয়া লও।

DE সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। DEF একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; এবং DE উহার অতিভুজ।

∴ $DE^2 = EF^2 + FD^2$ (২৮ উপপাদ্য)

$= BC^2 + CA^2$ (অঙ্কন)

$= AB^2$ (কল্পনা)

∴ DE = AB।

এখন, △ABC ও △DEFএর

AB = DE (প্রমাণিত)

BC = EF

CA = FD ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ ∠ACB = ∠DFE।

কিন্তু, অঙ্কনানুসারে ∠DFE = এক সমকোণ

∴ ∠ACB = এক সমকোণ। ই. উ. বি.

মন্তব্য। ২৯শ উপপাদ্য ২৮শ উপপাদ্যের বিপরীত।

১১৬। অতিভুজ এবং সমকোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c একক হইলে এই বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে a^2, b^2 ও c^2 বর্গ একক হইবে।

∴ ২৮ উপপাদ্য অনুসারে, a^2 বর্গ একক $= (b^2 + c^2)$ বর্গ একক ;

অর্থাৎ, $a^2 = b^2 + c^2$।

∴ $b^2 = a^2 - c^2$; এবং $c^2 = a^2 - b^2$।

অতএব, সমকোণী ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহু দেওয়া থাকিলে তৃতীয়টি নির্ণয় করা যায়।

১ উদাহরণ। এক সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয় 3″ ইঞ্চি ও 4″ ইঞ্চি, অতিভুজ কত ?

মনে কর অতিভুজ $= a$ ইঞ্চি।

$\therefore \quad a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$;

অর্থাৎ, $a = 5$, $\therefore$ অতিভুজ $= 5''$।

২ উদাহরণ। কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর এক বাহু যথাক্রমে 13 সে. মি. ও 5 সে. মি. ; তৃতীয় বাহুটি নির্ণয় কর।

মনে কর তৃতীয় বাহু $= x$ সে. মি।

$\therefore \quad 13^2 = 5^2 + x^2$

অর্থাৎ, $x^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$;

$\therefore \quad x = \sqrt{144} = 12$।

৩ উদাহরণ। একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে 5″, 12″ ও 13″। প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

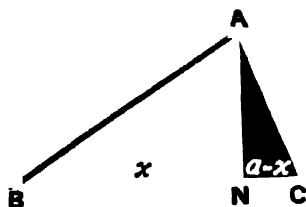
$13^2 = 169$; এবং $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$;

$\therefore \quad 13^2 = 5^2 + 12^2$।

অতএব, ২৯ উপপাদ্য অনুসারে 5″ ও 12″ বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ এক সমকোণ, অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমকোণী।

১১৭। বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য হইতে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

$\triangle$ABCএর BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$। ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

A হইতে BCএর উপর AN লম্ব টান। মনে কর AN $= p$, BN $= x$; $\therefore$ CN $= a - x$।

তাহা হইলে, $\triangle$ABCএর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\, a.p.$ ...(ক)

$\angle$ANB = এক সমকোণ ; $\therefore c^2 = p^2 + x^2$; অর্থাৎ, $p^2 = c^2 - x^2$;
আবার, $\because$ $\angle$ANC = এক সমকোণ ; $\therefore p^2 = b^2 - (a-x)^2$ ।

$$\therefore c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

অর্থাৎ, $2ax = c^2 + a^2 - b^2$

$$\therefore \quad x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} ।$$

$$\therefore p^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{4c^2a^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{\{2ca + (c^2 + a^2 - b^2)\}\ \{2ca - (c^2 + a^2 - b^2)\}}{4a^2}$$

$$= \frac{\{(c^2 + a^2 + 2ca) - b^2\}\ \{b^2 - (c^2 + a^2 - 2ca)\}}{4a^2}$$

$$= \frac{\{(c+a)^2 - b^2\}\ \{b^2 - (c-a)^2\}}{4a^2}$$

$$= \frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2}$$

এখন, মনে কর $a+b+c = 2s$;

$$p^2 = \frac{2s.2(s-a).\ 2(s-b).\ 2(s-c)}{4a^2}$$

$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

$$\therefore p = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} ।$$

এখন, (ক) হইতে,

$$\triangle ABC\text{এর ক্ষেত্রফল} = \frac{ap}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} ।$$

দ্রষ্টব্য। $2s = a + b + c =$ ত্রিভুজের পরিসীমা।

$\therefore$ $s =$ ত্রিভুজের পরিসীমার অর্দ্ধেক।

উদাহরণ। এক ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে $6''$, $8''$ ও $10''$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $10''$-বাহু হইতে বিপরীত শীর্ষের দূরত্ব কত?

$s =$ ত্রিভুজের পরিসীমার অর্দ্ধেক $= (6'' + 8'' + 10'') \times \frac{1}{2} = 12''$।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$ বর্গ ইঞ্চি

$= \sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2}$ বা 24 বর্গ ইঞ্চি।

এখন, মনে কর $10''$-বাহু হইতে বিপরীত শীর্ষের দূরত্ব $= p$ ইঞ্চি।

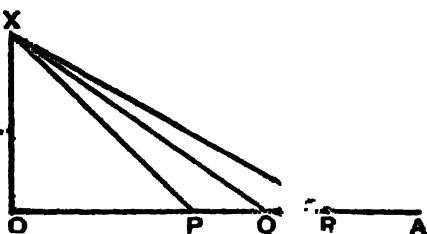
$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{10 \times p}{2}$ বর্গ ইঞ্চি;

$$\therefore \quad \frac{10 \times p}{2} = 24; \text{ অর্থাৎ, } p = 4{\cdot}8\text{।}$$

অতএব, নির্ণেয় দূরত্ব $= 4{\cdot}8''$ ইঞ্চি।

১১৮। জ্যামিতিক অঙ্কন দ্বারা $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,……ইঞ্চির আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।

মনে কর OA ও OX পরস্পর লম্ব এবং OX $= 1''$; OX হইতে $1''$ ইঞ্চির সমান করিয়া OP অংশ কাটিয়া লও।

XP সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, $XP^2 = OP^2 + OX^2 = 1 + 1$ বা 2 বর্গ ইঞ্চি।

$\therefore$ $XP = \sqrt{2}$ ইঞ্চি;

এখন, OA হইতে XPএর সমান করিয়া OQ অংশ কাটিয়া লও;

XQ সংযুক্ত কর।

$XQ^2 = OX^2 + OQ^2 = OX^2 + XP^2 = 1 + 2$ বা 3 বর্গ ইঞ্চি

$\therefore$ $XQ = \sqrt{3}$ ইঞ্চি ; ইত্যাদি।

এখন, কর্ণ মাপনী দ্বারা XP, XQ, ইত্যাদির দৈর্ঘ্য মাপিলেই $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ইত্যাদি দুই দশমিক অঙ্ক পর্য্যন্ত পাওয়া যাইবে।

দ্রষ্টব্য। এইরূপ ভাবে যে কোন এককের $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ইত্যাদি নির্ণয় করা যাইতে পারে।

অনুশীলনী ৩৫

১। নিম্নলিখিত বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজের কালি নির্ণয় কর :

(ক) 12", 20", 16" ; (খ) 4·5", 6", 7·5" ; (গ) 2·6 সে. মি., 4 সে. মি, 4·2 সে. মি., (ঘ) 156 সে. মি., 165 সে. মি, 219 সে. মি.।

২। ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুগুলি যথাক্রমে 20", 48" ও 52"। AB হইতে C-এর দূরত্ব স্থির কর।

৩। কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি (ক) 3", 4", 5"। (খ) 1·8 সে. মি., 2·4 সে. মি., 3 সে. মি. ; (গ) x^2+y^2, x^2-y^2, $2xy$। প্রমাণ কর যে প্রত্যেকস্থলেই ত্রিভুজটি সমকোণী।

৪। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণসংলগ্ন বাহুদ্বয় (ক) 15 সে. মি., 20 সে. মি., (খ) 12·5", 30", (গ) 24", 18", প্রত্যেকস্থলে অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৫। কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর এক বাহু যথাক্রমে (ক) 65", 25", (খ) 130", 108", (গ) 106 সে. মি., 42 সে. মি.। ত্রিভুজের অবশিষ্ট বাহুটি নির্ণয় কর।

৬। একখানি 25 ফুট লম্বা মইএর একপ্রান্ত একটি দেওয়ালে সংলগ্ন আছে। যদি মইএর অপর প্রান্ত দেওয়াল হইতে 15 ফুট দূরে থাকে, তবে উহার এক প্রান্ত অপর প্রান্তের কত উর্দ্ধে আছে স্থির কর।

৭। এক ব্যক্তি A বিন্দু হইতে পূর্ব্বদিকে 21 মাইল গিয়া পরে উত্তর দিকে 20 মাইল গেলে সে A বিন্দু হইতে কতদূরে থাকিবে?

*৮। কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

*৯। সমবাহু ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষ হইতে বিপরীত ভূমিব উপর লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে ঐ লম্বের উপব অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ যে কোন বাহুব উপব অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান।

(ক. প্র., ১৯৩৩)

১০। রম্বসেব কর্ণদ্বয় 10″ ও 24″ হইলে উহার বাহু কত?

১১। PQRS চতুর্ভুজেব কর্ণদ্বয পবস্পর লম্ব হইলে প্রমাণ কর যে

$$PQ^2 + RS^2 = PS^2 + QR^2 \text{ ।}$$

*১২। দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলেব (ক) সমষ্টির সমান, (খ) অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

১৩। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। A ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে AD ও CE মধ্যমা টানা হইল। প্রমাণ কর যে $4(AD^2 + CE^2) = 5\ AC^2$ ।

*১৪। রম্বসের চারিবাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বযের সমষ্টির সমান।

১৫। ABCD আয়তক্ষেত্রের A, B, C ও Dকে যে কোন বিন্দু Pএর সহিত সংযুক্ত করা হইল। প্রমাণ কর যে

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2 \text{ ।}$$ (ক. প্র., ১৯২১)

অনুশীলনী ৩৬ (বিবিধ প্রশ্ন)

১। ABC ত্রিভুজেব AB = 10 সে. মি., BC = 10·5 সে. মি. এবং CA = 6·5 সে. মি.। যদি A হইতে বিপরীত বাহুব উপব AD লম্ব টানা হয় তবে ADএব দৈর্ঘ্য নির্ণয় কব।

*২। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; এবং AL, A হইতে BCএব উপব অঙ্কিত লম্ব। প্রমাণ কব যে $AL^2 = 3\ BL^2$। (পা. প্র., ১৯৩৩)

*৩। এক সবল বেখাকে এরূপ দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন এক ভাগেব উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অন্য ভাগের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়। [সঙ্কেত: এক সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহাব অতিভুজ ও অপব এক বাহুব সমষ্টি নির্দ্দিষ্ট সবল বেখাব সমান।]

৪। O, ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তবস্থ একটি বিন্দু। যদি O বিন্দু হইতে OD, OE এবং OF যথাক্রমে BC, CA এবং ABএব উপব লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$AE^2 + BF^2 + CD^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$। (ক. প্র., ১৯০৪)

*৫। এক সবল রেখাকে এইরূপ দুইভাগে বিভক্ত কর যেন ঐ দুইভাগের উপব অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের (ক) সমষ্টি; (খ) অন্তব অন্য একটি নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়। (৯৩ ও ৯২ অনু.)

৬। ABCD আয়তক্ষেত্রেব BC ও CD বাহুব মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F হইলে প্রমাণ কর যে AEF ত্রিভুজ ABCF ট্রাপিজিয়মের অর্দ্ধেক।

৭। ABCD একটি চতুর্ভুজ। ABC ত্রিভুজ ADC ত্রিভুজের দ্বিগুণ। AC এবং BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে DO, BDএর এক-তৃতীয়াংশ।

৮। কোন ত্রিভুজের ভূমি, অপব এক বাহু, ও ক্ষেত্রফল দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (ক. প্র., ১৯৩১)

৯। এক নির্দ্দিষ্ট আযতক্ষেত্রেব সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি রম্বস অঙ্কিত কব যেন ঐ বম্বসেব একবাহু আযতক্ষেত্রের একবাহুর সমান হয। (ক. প্র., ১৯৩৩)

১০। একটি নির্দ্দিষ্ট সামান্তবিকেব ভূমির উপর উহাব সমান এক বম্বস অঙ্কিত কর। কখন্ অঙ্কন কার্য্য অসম্ভব হইবে? (ক. প্র., ১৯৩৫)

*১১। কোন নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপব অবস্থিত এবং সমান সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলিব ভবকেন্দ্রের সঞ্চাবপথ নির্ণয কব।

১২। যদি দুই ত্রিভুজের উচ্চতা পবস্পর সমান হয় কিন্তু তাহারা অসমান ভূমির উপব দণ্ডাযমান থাকে, তবে যেটির ভূমি বৃহত্তর সেটিব ক্ষেত্রফলও অপরটিব ক্ষেত্রফল হইতে বৃহত্তর হইবে।

১৩। D, ABC ত্রিভুজের BC বাহুব মধ্যবিন্দু। C হইতে AB এব সমান্তরাল কবিযা অঙ্কিত সবল রেখা বর্দ্ধিত ADকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। F ও G যথাক্রমে CEএর মধ্যবিন্দু ও ত্রিখণ্ডন বিন্দু হইলে প্রমাণ কব যে $\Delta DFG = \frac{1}{12}\Delta ABC$। (বো. প্র., ১৯২৩)

১৪। P ও Q, ΔABCএব AB এবং AC বাহুব মধ্যবিন্দু। C হইতে BAএর সমান্তরাল সরল বেখা BQকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে $\Delta PQE = \Delta PQC$। (বো. প্র., ১৯৩১)

১৫। ABCD, এক সামান্তরিক। AB এবং DC উভযের বর্দ্ধিত অংশ ও BC দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রে P যে কোনও একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\Delta PAB + \Delta PBC + \Delta PCD = \Delta PDA$। (বো. প্র., ১৯৩৬)

১৬। ABCD একটি সামান্তরিক। ইহাব বাহিরে এবং AD ও BC উভযেব বর্দ্ধিত অংশের ভিতবে যে কোনও বিন্দু P লও। প্রমাণ কর যে

$\Delta BDP = \Delta ADP + \Delta CDP$। (বো. প্র., ১৯৩০)

১৭। ABCD একটি সামান্তরিক। AC কর্ণের সমান্তরাল EF সরল রেখা AD ও DCকে E ও F বিন্দুতে ছেদ কবিলে প্রমাণ কর যে $\triangle ABE = \triangle BCF$। (বো. প্র., ১৮৭৯)

*১৮। দুইটি সমক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ একই ভূমিব উপর এবং উহাব বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কব যে তাহাদের শীর্ষসংযোজক সবল বেখা ভূমি অথবা বর্দ্ধিত ভূমি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

(ক. প্র., ১৮৮৮)

*১৯। যদি কোন ত্রিভুজেব দুই বাহুব মধ্যবিন্দু সংযুক্ত কবা যায়, তবে উৎপন্ন ত্রিভুজ প্রদত্ত ত্রিভুজেব সহিত সদৃশকোণ হইবে, এবং উহার ক্ষেত্রফল প্রদত্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলেব এক-চতুর্থাংশ হইবে।

(ক. প্র., ১৮৭৩, ১৮৮৮)

*২০। যদি কোনও চতুর্ভুজের চারি বাহুব মধ্যবিন্দু সংযুক্ত করা যায়, তবে যে সামান্তরিক উৎপন্ন হয তাহার ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক হইবে। (ক. প্র., ১৮৮৭)

২১। কোন সামান্তবিকেব ভূমি এক ট্রাপিজিয়মেব সমান্তবাল বাহুদ্বযের সমষ্টির সমান; এবং ইহার উচ্চতা ঐ ট্রাপিজিযমের সমান্তরাল বাহুদ্বযের ব্যবধানেব সমান। প্রমাণ কব যে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ট্রাপিজিয়মেব ক্ষেত্রফলেব দ্বিগুণ। (ক. প্র., ১৮৮৮)

২২। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; এবং X, BC বাহুর একটি বিন্দু। যদি $BX = \frac{1}{4}BC$ হয়, প্রমাণ কর যে $AX^2 = 13\ BX^2$।

২৩। ABCD একটি সামান্তরিক; এবং O, উহার বহিঃস্থ যে কোনও একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\triangle OAB$ এবং $\triangle OCD$এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি (বা অন্তবফল) সামান্তরিকেব ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক। দুইটি বিষয়ের পার্থক্য কি বুঝাইয়া দাও। (বো. প্র., ১৮৬৪)

২৪। ABC, একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ ; এবং P, যে কোন একটি বিন্দু। △PAB = 2△PAC হইলে Pএর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*২৫। এক সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে অতিভুজের উপর অঙ্কিত ত্রিভুজ অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত ত্রিভুজের সমষ্টির সমান।

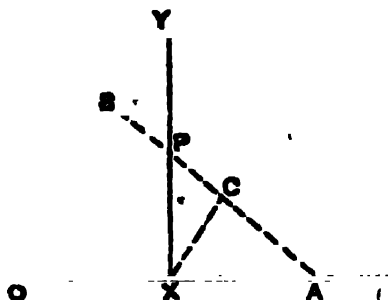
*২৬। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x^2+1, x^2-1, $2x$ হইলে উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

২৭। ABCD একটি চতুর্ভুজ ; এবং △ABC, △ADCএর তিন গুণ। যদি AC ও BD, O বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে

DO = $\frac{1}{4}$ BD।

২৮। ত্রিভুজের কোন বাহুর এক বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া ঐ ত্রিভুজকে 2 : 3 অনুপাতে ভাগ কর।

২৯। P, △ABCএর অন্তর্গত একটি বিন্দু। যদি △BPC = △CPA = △APB হয়, Pএর অবস্থান নির্ণয় কর।

*৩০। একটি নির্দ্দিষ্ট কোণের অন্তর্গত কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোণের বাহুদ্বয় পর্য্যন্ত সরল রেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে উৎপন্ন

ত্রিভুজের মধ্যে যেটির ভূমি ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে উহাই ক্ষুদ্রতম।

[মনে কর $\angle AOB$এর অন্তর্গত P বিন্দু দিয়া AB এবং XY সরল রেখা টানা হইল। P, XYএর মধ্যবিন্দু হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$\triangle OAB > \triangle OXY$$ ।

প্রমাণ। মনে কর AP > BP। AP হইতে BPএর সমান PC অংশ কাটিয়া লও। ∴ △BPY ও △CPX সর্ব্বসম। কিন্তু △APX > △CPX ; ∴ △APX > △BPY। উভয়পক্ষে OXPB ক্ষেত্র যোগ করিলে, △OAB > △OXY।]

৩১। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ একটি সমকোণ। যদি A হইতে BCএর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য p হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$ap = bc \text{ ; এবং } \frac{1}{p^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$ ।

৩২। কোন পুষ্করিণীতে একটি পদ্মের কুঁড়ি ফুটিয়া ছিল; এবং উহার অগ্রভাগ জলের এক বিঘত উপরে ছিল। কিন্তু বাতাসে সরিয়া গিয়া কুঁড়িটি দুই হাত দূরে জলে ডুবিয়া গেল। জলের গভীরতা নির্ণয় কর। (লীলাবতী)

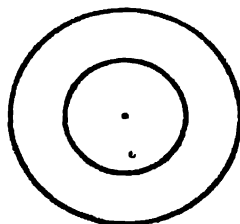
তৃতীয় খণ্ড

বৃত্ত

১১৯। বৃত্ত, ব্যাসার্দ্ধ, ব্যাস, কেন্দ্র, পরিধি, ইত্যাদি কাহাকে বলে, তাহা ৩১—৩৫ অনুচ্ছেদ (১৩—১৪ পৃষ্ঠায়) লিখিত হইয়াছে।

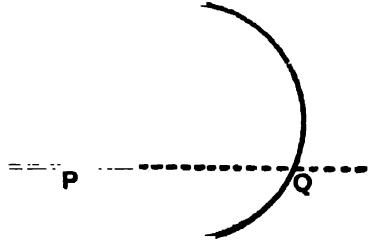
প্রকৃতপক্ষে বৃত্ত বলিতে পরিধি দ্বারা বেষ্টিত সমগ্র ক্ষেত্রকে বুঝাইলেও কখন কখন উহা পরিধি অর্থে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

১২০। বৃত্তের সংজ্ঞা হইতে বুঝা যায় যে একই বৃত্তের **ব্যাসার্দ্ধগুলি পরস্পর সমান,** এবং **ব্যাস ব্যাসার্দ্ধের দ্বিগুণ**।

১২১। যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র একই, তাহাদিগকে **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত** (Concentric circles) বলে।

১২২। এই সকল সংজ্ঞা হইতে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়।

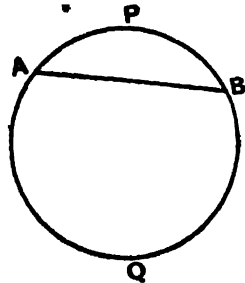
(ক) কোন বৃত্তের পরিধির উপর যে কোন বিন্দু ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী ; সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধির বহিঃস্থ, উপরিস্থ ও অভ্যন্তরস্থ বিন্দুত্রয়ের দূরত্ব পরস্পর তুলনা করিলে দেখিতে পাওয়া যাইবে যে বহিঃস্থ বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্দ্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর, উপরিস্থ বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্দ্ধের সমান, এবং অভ্যন্তরস্থ বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্দ্ধ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

(খ) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর, উহার সমান, অথবা উহা হইতে ক্ষুদ্রতর হইলে ঐ বিন্দু যথাক্রমে পরিধির বাহিরে, পরিধির উপর, বা উহার অভ্যন্তরে থাকিবে।

(গ) বৃত্ত বক্ররেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র। এইজন্য যদি কোন সরল রেখা উহার পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে তবে ঐ সকল রেখাকে বর্দ্ধিত করিলে উহা বৃত্তকে আবার দ্বিতীয় বিন্দু Qতে ছেদ করিবে।

(ঘ) সমান সমান ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্তগুলি সর্ব্বসম। কারণ, উপরিপাত (Superposition) দ্বারা দেখান যাইতে পারে যে এইরূপ এক বৃত্তের কেন্দ্র অপর এক সমান বৃত্তের কেন্দ্রের উপর পড়িলে, পরিধির প্রত্যেক বিন্দু কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী বলিয়া উহাদের পরিধিগুলিও পরস্পর মিলিয়া যাইবে।

(ঙ) দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ অসমান হইলে উহারা পরস্পর ছেদ করিতে পারে না। (১২১ অনুচ্ছেদের চিত্র দেখ)

১২৩। বৃত্তের পরিধির যে কোন অংশকে **চাপ** (arc) বলে। নিম্নের চিত্রে পরিধির APB অংশ একটি চাপ; এইরূপ, AQB অংশও একটি চাপ।

পরিধির যে কোনও দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরল রেখাকে ঐ বৃত্তের **জ্যা** (Chord) বলে। পার্শ্বের চিত্রে AB সরল রেখা একটি জ্যা।

প্রত্যেক জ্যা পরিধিকে দুইটি চাপে বিভক্ত করে। এই চাপদ্বয়ের বৃহত্তরটিকে **অধিচাপ** (Major arc), এবং ক্ষুদ্রতরটিকে **উপচাপ** (Minor arc) বলে। অতএব, অধিচাপ পরিধির অর্দ্ধেক হইতে বৃহত্তর এবং উপচাপ, অর্দ্ধপরিধি হইতে ক্ষুদ্রতর।

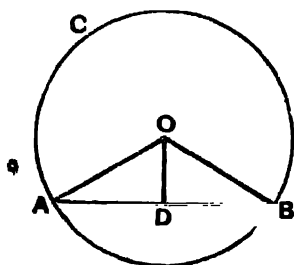
ব্যাসও একটি জ্যা।

উপপাদ্য ৩০

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরল রেখা যদি ঐ বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন অন্য কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে ঐ সরল রেখা উক্ত জ্যার উপর লম্ব হইবে।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যার উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

[If a straight line drawn from the centre of a circle bisects a chord which is not a diameter, it cuts the chord at right angles.

Conversely, the perpendicular from the centre upon a chord bisects the chord.]

মনে কর O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র; এবং AB, কেন্দ্রের বহিঃস্থ যে কোন একটি জ্যা।

মনে কর OD সরল রেখা ABকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OD, AB জ্যার উপর লম্ব।

OA ও OB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\triangle$OAD ও $\triangle$OBDএর

OA = OB, ($\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ)

AD = BD (কল্পনা)

OD = OD;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম ;

∴ ∠ODA = ∠ODB।

কিন্তু, ইহারা সন্নিহিত কোণ।

∴ OD, ABএর উপর লম্ব। ই. উ. বি.

বিপরীতক্রমে, মনে কর OD, ABএর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OD, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

OA ও OB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। OAD ও OBD সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB

OD = OD ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।

∴ AD = BD ;

অর্থাৎ OD, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ই. উ. বি.

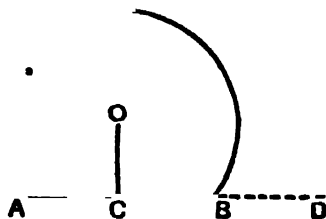
অনুসিদ্ধান্ত ১। কোন সরল রেখা একটি জ্যাকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ঐ সরল রেখা কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

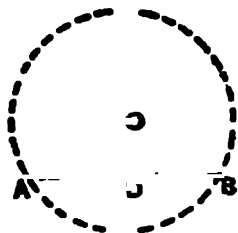
মনে কর O, একটি বৃত্তের কেন্দ্র ; এবং AB সরল রেখা উহাকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল।

O হইতে ABএর উপর OC লম্ব অঙ্কিত কর ;

O
A C B D

∴ AC = CB।

এখন, যদি AB সরল রেখা বৃত্তটিকে তৃতীয় বিন্দু Dতে ছেদ করে, তাহা হইলে AC এবং CDও পরস্পর সমান হইবে।

∴ CB = CD। কিন্তু, ইহা অসম্ভব। অতএব AB, বৃত্তটিকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। বৃত্তের যে কোন ব্যাস ঐ বৃত্তের একটি প্রতিসাম্য-অক্ষ। (৮৬ অনু.)

কারণ, একটি ব্যাসের উপর লম্বভাবে অঙ্কিত যে-কোন জ্যা ঐ ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয; সুতরাং, বৃত্তকে ঐ ব্যাস-ক্রমে দুই ভাঁজ করিলে ব্যাসের উভয় পার্শ্বস্থ অংশদ্বয় পরস্পর মিলিয়া যাইবে।

অতএব, বৃত্তের যে কোন ব্যাস ঐ বৃত্তকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মন্তব্য। ৩০শ উপপাদ্যের চিত্রে A এবং DOএর অবস্থান জানা থাকিলে Bএর অবস্থান নির্ণয় করা যায়। কারণ, B, A হইতে DOএর উপর অঙ্কিত লম্বের একটি বিন্দু, এবং DB = AD।

অতএব, **বৃত্তের কেন্দ্রগামী কোন সরল রেখা এবং একটি বিন্দুর অবস্থান জানা থাকিলে, উহার দ্বিতীয় একটি বিন্দুর অবস্থানও নির্ণয় করা যায়।**

অনুশীলনী ৩৭

*১। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু দিয়া এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যেন জ্যাটি ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

*২। দুই বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে তাহাদের সাধারণ জ্যার মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রদ্বয় একই সরল রেখায় অবস্থিত হইবে।

*৩। AB সরল রেখা, দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটিকে A ও B বিন্দুতে এবং ক্ষুদ্রতরটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে AC = BD।

*৪। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখা বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে। (বো. প্র., ১৯০৯ ; ম. প্র.; ১৮৮২)

*৫। কোন বৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলিব মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (এ. প্র., ১৯৩৩)

*৬। কোনও বৃত্তের OB ব্যাসার্দ্ধের সহিত সমান কোণ করিয়া AB ও BD জ্যাদ্বয় অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে জ্যা দুইটি সমান ও কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী। (এ. প্র., ১৯৩৩)

*৭। দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিযা নির্দ্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত কিরূপে অঙ্কিত করা যায় দেখাও। অঙ্কন কখন্ সম্ভবপর নহে ? (ক. প্র., ১৯৩২)

৮। কোন বৃত্তেব দুইটি জ্যা যদি কেন্দ্র দিয়া অঙ্কিত না হয়, তবে তাহারা পরস্পবকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না। (ক. প্র., ১৯১৮)

৯। কোন মাঠে এক ছাগল খুঁটির সহিত দড়ি দিয়া এরূপে আবদ্ধ আছে যে উহা খুঁটি হইতে l দূবত্ব পর্য্যন্ত নাগাল পায়। যদি এক সরল রেখায অবস্থিত কোন চারা গাছের সারি হইতে খুঁটিটি $d\ (<l)$ দূরে অবস্থিত থাকে, তবে দেখাও যে ছাগলটি উক্ত সারির $2\sqrt{l^2-d^2}$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট স্থানের গাছগুলি খাইতে পারিবে। (ক. প্র., ১৯৩৩, ঐচ্ছিক)

*১০। প্রমাণ কর যে **ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা**।

[সঙ্কেত : ৩০ উপপাদ্যের চিত্রে, সমকোণী ত্রিভুজ OADএর

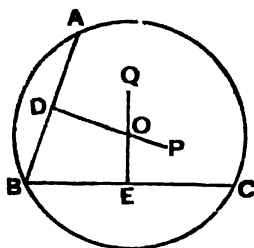
অতিভুজ OA > AD

∴ 2 OA > 2 AD

অর্থাৎ, ব্যাস > AB।]

উপপাদ্য ৩১

একই সরল রেখায় অবস্থিত নয় এরূপ তিনটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

[One and only one circle can be drawn through three given points not in the same straight line.]

মনে কর A, B ও C তিনটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু; এবং উহারা এক সরল রেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B ও C বিন্দু দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

AB ও BC সংযুক্ত কর।

মনে কর DP, ABকে, এবং EQ, BCকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। এখন, AB ও BC একই সরল রেখায় অবস্থিত নয় বলিয়া DP ও EQ পরস্পর সমান্তরাল হইবে না, সুতরাং, উহারা পরস্পর ছেদ করিবে।

মনে কর উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। ∵ DP, ABকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে,

∴ DPএর যে কোন বিন্দু, A ও B হইতে সমদূরবর্ত্তী, (সম্পাদ্য ১৬)।

এইরূপ, EQএর যে কোন বিন্দু B ও C বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী।

অতএব, DP ও EQএর একমাত্র ছেদবিন্দু O, A, B ও C বিন্দুত্রয় হইতে সমদূরবর্ত্তী।

এখন, Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা A. B ও C দিয়া যাইবে।

∵ O ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্ত্তী হইতে পারে না,

∴ A, B ও C দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কিত হইতে পারে।

ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। দুই বৃত্ত পরস্পরকে দুইটির অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

কারণ, যদি উহারা তিন বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে ঐ তিন বিন্দু দিয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইবে; কিন্তু, ইহা অসম্ভব।

মন্তব্য। ৩১শ উপপাদ্য হইতে দেখা যাইতেছে যে, কোন বৃত্তের তিনটি বিন্দু নির্দ্দিষ্ট থাকিলেই ঐ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় করা যায়। অতএব, কোন বৃত্তের তিন বিন্দু নির্দ্দিষ্ট থাকিলে উহার আকার এবং অবস্থান সম্পূর্ণরূপে স্থির করা যাইতে পারে।

১২৪। **স্বীকার্য্য অঙ্কন**। তিনটি বিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থিত না হইলে উহাদের মধ্য দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়; সুতরাং, প্রতিজ্ঞার প্রমাণের জন্য এইরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া একটি বৃত্তের অঙ্কন কল্পনা করা যাইতে পারে।

১২৫। **পরিবৃত্ত**। কোন ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ দিয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় উহাকে ঐ ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** (Circum-circle) বলে; এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) বলে।

পরিবৃত্তটি অঙ্কিত হইলে, উহা ত্রিভুজের চারিদিকে **পরিলিখিত** (Circumscribed) হইল বলা হয়।

অনুশীলনী ৩৮

*১। একটি বৃত্ত বা বৃত্তের চাপ দেওয়া আছে। কিরূপে উহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে পারা যায় দেখাও।

*২। কোন বৃত্তের একটি বিন্দু ও একটি জ্যা দেওয়া আছে। বৃত্তটি কিরূপে অঙ্কিত করিবে দেখাও। এইরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইবে?

*৩। প্রমাণ কর যে কোন বৃত্তের একাধিক কেন্দ্র থাকিতে পারে না।

*৪। যদি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু P ঐ বৃত্তের পরিধিস্থ তিন বা ততোধিক বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী হয়, তবে P বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

*৫। প্রমাণ কর যে দুই বৃত্তের একটি সাধারণ চাপ থাকিতে পারে না।

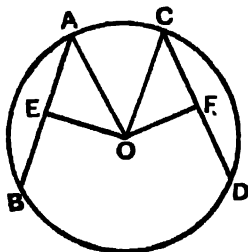
*৬। প্রমাণ কর যে সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু হইবে।

*৭। প্রমাণ কর যে কোন আয়তক্ষেত্রের শীর্ষগুলি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

*৮। যে-কোন সামান্তরিকের চারি শীর্ষ দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় কি? প্রমাণ কর যে কোন সামান্তরিকের পরিবৃত্ত থাকিলে উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুই ঐ পরিবৃত্তের কেন্দ্র হইবে, এবং ইহা হইতে দেখাও যে আয়তক্ষেত্র ব্যতীত অন্য কোন সামান্তরিকের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করা যায় না।

উপপাদ্য ৩২

কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যাগুলি উহার কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী। বিপরীত ক্রমে, কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী জ্যাগুলি পরস্পর সমান।

[Equal chords of a circle are equidistant from the centre. *Conversely*, Chords equidistant from the centre are equal.]

মনে কর কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় পরস্পর সমান ; এবং O, ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। O হইতে AB ও CDএর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব টান। প্রমাণ করিতে হইবে যে OE = OF।

OA ও OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\because$ OE, AB জ্যার উপর লম্ব,

$\therefore$ OE, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, (৩০ উপপাদ্য)

অর্থাৎ, $AE = \frac{1}{2} AB$

এইরূপ, $CF = \frac{1}{2} CD$।

কিন্তু, $AB = CD$

$\therefore$ $AE = CF$, (সমান সমান বস্তুর অর্দ্ধেক বলিয়া)।

এখন, OAE ও OCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OA = অতিভুজ OC, (একই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ)

AE বাহু = CF বাহু (প্রমাণিত)

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।
∴ OE = OF। ই. উ. বি.

বিপরীত ক্রমে, মনে কর OE = OF।
প্রমাণ করিতে হইবে যে AB = CD।

প্রমাণ। OAE ও OCF সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির
অতিভুজ OA = অতিভুজ OC, (একই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ)
OE = OF
∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।
∴ AE = CF;
কিন্তু, AE = $\frac{1}{2}$ AB, এবং CF = $\frac{1}{2}$ CD;
∴ AB = CD। ই. উ. বি.

অনুশীলনী ৩৯

*১। কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যা সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (ক. প্র. ১৯১৩, ১৯২১, ১৯৩৩, ঢা. প্র., ১৯৩৫)

*২। AB এবং AC কোনও বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ কর যে BAC কোণের দ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে। (ক. প্র., ১৯২৬)

*৩। যদি কোন বৃত্তের দুই জ্যা পরস্পর ছেদ করে এবং উহারা ছেদবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক সরল রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে জ্যা দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

*৪। যদি দুইটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে একটি জ্যার অংশদ্বয় যথাক্রমে অন্যটির অংশদ্বয়ের সমান হইবে।

৫। XY কোন বৃত্তের জ্যা। XYএর A বিন্দু দিয়া উহার সমান অপর একটি জ্যা অঙ্কিত কর।

*৬। এক বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন দুইটি জ্যা অঙ্কিত কর যাহারা পরস্পর সমান এবং পরস্পর লম্ব হইবে।

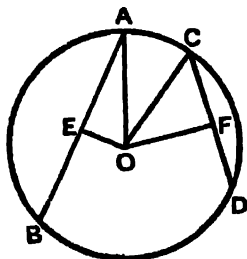
৭। এক বৃত্তে কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যযুক্ত জ্যা অঙ্কিত কর।

উপপাদ্য ৩৩

কোন বৃত্তের দুই জ্যার মধ্যে কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্ত্তী জ্যা অপেক্ষাকৃত দূরবর্ত্তী জ্যা হইতে বৃহত্তর।

বিপরীত ক্রমে, দুই জ্যার মধ্যে বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্ত্তী।

[A chord of a circle which is nearer to the centre is greater than one more remote.

Conversely, The greater of two chords of a circle is nearer to the centre than the less.]

মনে কর AB ও CD কোন বৃত্তের দুই জ্যা; এবং O, ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

O হইতে AB ও CDএর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্বদ্বয় অঙ্কিত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে (ক) $OE < OF$ হইলে, $AB > CD$,

এবং (খ), $AB > CD$ হইলে, $OE < OF$।

OA এবং OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। যেহেতু OE, AB জ্যার উপর লম্ব,

∴ OE, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে;

অর্থাৎ $AE = \frac{1}{2} AB$।

এইরূপ, $CF = \frac{1}{2} CD$।

এখন, OAE সমকোণী ত্রিভুজের $OA^2 = AE^2 + OE^2$;
এবং OCF সমকোণী ত্রিভুজের $OC^2 = CF^2 + OF^2$ ।

কিন্তু, $OA = OC$, (একই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ)

$\therefore \quad AE^2 + OE^2 = CF^2 + OF^2$ ।

অতএব, (ক) $OE < OF$ হইলে,

$AE > CF$ হইবে ।

অর্থাৎ, $AB > CD$ হইবে ।

এবং (খ) $AE > CF$ হইলে, $OE < OF$ হইবে :

অর্থাৎ, $AB > CD$ হইলে, $OE < OF$ হইবে । ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত । ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা ।

অনুশীলনী ৪০

*১ । প্রমাণ কর যে ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা ।

*২ । এক বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া ক্ষুদ্রতম জ্যা অঙ্কিত কর । (ক. প্র., ১৯২৬)

[সঙ্কেত : P, নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, এবং O, বৃত্তের কেন্দ্র হইলে OPএর সহিত লম্ব ভাবে একটি জ্যা অঙ্কিত কর । P দিয়া অন্য যে কোন জ্যা অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে পূর্ব্বোক্ত জ্যা শেষোক্ত জ্যা হইতে ক্ষুদ্রতর ।]

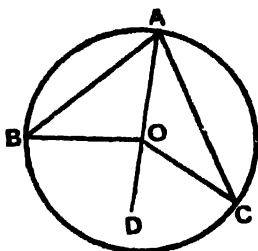
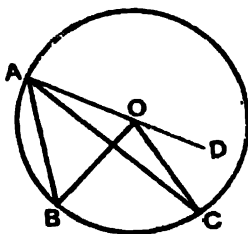
৩ । এক বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল । যদি O, বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে AB ও CDএর মধ্যে যেটি POএর সহিত ক্ষুদ্রতর সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করিবে সেইটি বৃহত্তর হইবে ।

৪ । কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4″, 9·6″ ; এবং উহাদের ব্যবধান 6·8″ । কেন্দ্র হইতে জ্যাদ্বয়ের দূরত্ব ও বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর ।

বৃত্তস্থ কোণ বিষয়ক উপপাদ্য

উপপাদ্য ৩৪

কোন বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

[The angle at the centre of a circle is double of an angle at the circumference standing on the same arc.]

১ম চিত্র   ২য় চিত্র

মনে কর O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র ; এবং BC, একটি চাপ।

মনে কর BC চাপ, কেন্দ্রে BOC কোণ, ও পরিধিতে BAC কোণ উৎপন্ন করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠BOC, ∠BACএর দ্বিগুণ।

AO সংযুক্ত কর ও উহাকে D পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

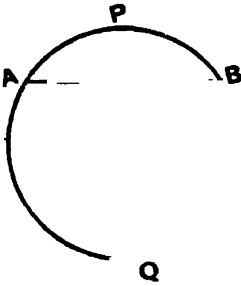
প্রমাণ। △OABএর বহিঃকোণ BOD, দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণ OAB ও OBAএর সমষ্টির সমান।

কিন্তু, ∵ OA = OB ; ∴ ∠OBA = ∠OAB।

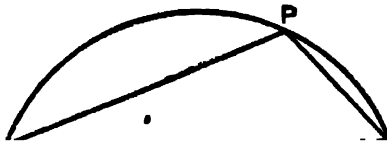
∴ ∠BOD, ∠OABএর দ্বিগুণ।

এইরূপ, ∠COD, ∠OACএর দ্বিগুণ।

∴ প্রথম চিত্রে ইহাদের সমষ্টি এবং দ্বিতীয় চিত্রে ইহাদের অন্তরফল লইলে, প্রত্যেক স্থলেই ∠BOC, ∠BACএর দ্বিগুণ হইবে। ই. উ. বি.

১২৬। বৃত্তের কোন জ্যা ও তৎসংলগ্ন চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তাংশ** (Segment of a circle) বলে।

বৃত্তাংশের জ্যাকে কখন কখন ভূমি বলা হয়।

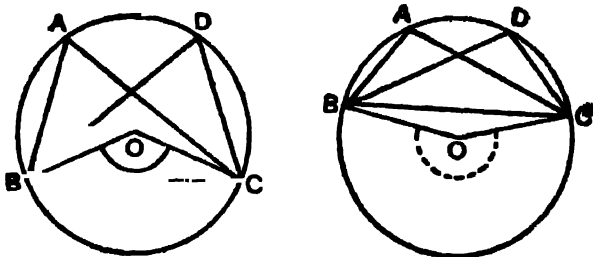
পার্শ্বের চিত্রে ABP, ABQ প্রত্যেকে একটি বৃত্তাংশ।

১২৭। **বৃত্তাংশস্থ কোণ**। কোন বৃত্তাংশের চাপের যে কোন বিন্দু হইতে উহার জ্যার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণকে **বৃত্তাংশস্থ কোণ** (Angle in a segment) বলে।

যথা, চিত্রে ∠APB, একটি বৃত্তাংশস্থ কোণ।

১২৮। যদি চারি কিংবা ততোধিক বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তাহা হইলে ঐ বিন্দুগুলিকে **একবৃত্তস্থ** (Concyclic) বলা হয়।

উপপাদ্য ৩৫

একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

[Angles in the same segment of a circle are equal.]

মনে কর ∠BAC ও ∠BDC, BADC বৃত্তাংশস্থ যে কোন তুইটি কোণ।

প্রমাণ কবিতে হইবে যে ∠BAC = ∠BDC।

মনে কর O, বৃত্তের কেন্দ্র। OB ও OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∵ কেন্দ্রস্থ ∠BOC ও পবিধিস্থ ∠BAC একই চাপের উপর অবস্থিত :

∴ ∠BOC, ∠BACএর দ্বিগুণ। (৩৪ উপপাদ্য)

অর্থাৎ ∠BAC, ∠BOC কোণের অর্দ্ধেক।

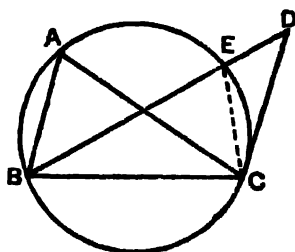
এইরূপ, ∠BDC, ∠BOC কোণের অর্দ্ধেক।

∴ ∠BAC = ∠BDC।

ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৩৫ (ক)

যদি দুই বিন্দুর সংযোজক সরল রেখা উহার একই পার্শ্বস্থ অপর দুই বিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ চারিটি বিন্দু একবৃত্তস্থ হইবে।

[If the straight line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points are concyclic.]

মনে কর B ও C বিন্দুদ্বযেব সংযোজক সবল বেখা A ও D বিন্দুতে BAC ও BDC, এই সমান কোণদ্বয় উৎপন্ন কবিয়াছে।

প্রমাণ কবিতে হইবে যে A, B, C ও D একবৃত্তস্থ হইবে।

A, B ও C এই তিন বিন্দু দিযা একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

যদি এই বৃত্ত D বিন্দু দিয়া না যায়, মনে কব এই বৃত্ত BDকে অথবা বৰ্দ্ধিত BDকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EC সংযুক্ত কব।

প্রমাণ। একই বৃত্তাংশস্থ BAC ও BEC কোণদ্বয পরস্পর সমান।

কিন্তু, BAC ও BDC কোণদ্বয় পরস্পর সমান (কল্পনা)

∴ $\angle BEC = \angle BDC$।

অর্থাৎ, বহিঃকোণ দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণেব সমান,

কিন্তু, ইহা অসম্ভব।

সুতরাং, A, B ও C-বিন্দুগামী বৃত্ত D বিন্দু দিযাও যাইবে;

অর্থাৎ, A, B, C ও D একবৃত্তস্থ হইবে। ই. উ. বি.

মন্তব্য। ৩৫ (ক) উপপাদ্য, ৩৫ উপপাদ্যের বিপরীত।

অনুশীলনী ৪১

(৩৪ উপপাদ্য)

১। যদি কোন বৃত্তেব দুই জ্যা AB ও CD, বৃত্তেব অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে পবস্পব ছেদ, কবে তবে AC ও BD, কেন্দ্রে যে কোণদ্বয় উৎপন্ন কবে তাহাদের সমষ্টি AEC কোণেব দ্বিগুণ। (ক. প্র., ১৮৮২)

২। যদি কোন বৃত্তেব AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তেব বহিঃস্থ E বিন্দুতে পবস্পব ছেদ করে তবে AC ও BD, কেন্দ্রে যে কোণদ্বয় উৎপন্ন কবে তাহাদের অন্তরফল AEC কোণেব দ্বিগুণ।

৩। কোন বৃত্তেব OA ও OB ব্যাসার্দ্ধদ্বয় পরস্পব লম্ব। A ও B বিন্দু হইতে AC ও BD, এই দুই সমান্তরাল জ্যা অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে AD এবং BC ও পবস্পব লম্ব।

৪। দুই বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পবস্পর ছেদ কবে এবং উহাদের প্রত্যেকটিব পরিধি অপরটির কেন্দ্র দিয়া যায। যদি A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন সরল বেখা বৃত্তদ্বয়কে আবার C ও D বিন্দুতে ছেদ কবে, তবে প্রমাণ কর যে $\triangle BCD$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

[উপপাদ্য ৩৫ ও ৩৫ (ক)]

*৫। এক ত্রিভুজের ভূমি ও শিবঃকোণ দেওয়া আছে, উহার শীর্ষের সঞ্চারপথ নির্ণয় কব। (ক. প্র., ১৯১১)

*৬। যদি এক সবল বেখা উহাব একই পার্শ্বস্থ কয়েকটি বিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন কবে, প্রমাণ কর যে ঐ বিন্দুগুলি এক বৃত্তেব উপর থাকিবে। (পা. প্র., ১৯৩৪)

৭। কোন বৃত্তের এক নির্দ্দিষ্ট চাপ PMএর উপব L যে কোন একটি বিন্দু। LPM ও LMP কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল। O বিন্দুব সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (ক. প্র., ১৯৩৪)

*৮। প্রমাণ কর যে একই বৃত্তাংশস্থ কোণ সমূদয়ের দ্বিখণ্ডকগুলি কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে। (ক. প্র., ১৯১৪)

*৯। কোন বৃত্তের জ্যা একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত হইলে, ঐ জ্যার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের অভ্যন্তরে, পরিধির উপর, অথবা বৃত্তের বহিঃস্থ হইলে সঞ্চারপথের পার্থক্য কিরূপ হইবে ?

১০। এক বৃত্তের উপর A, B ও C তিনটি বিন্দু। ∠BAC, ∠CBA, ∠ACBএর দ্বিখণ্ডকত্রয় বৃত্তের সহিত পুনরায় যথাক্রমে P, Q এবং Rএ মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে QR, APএর উপর লম্ব হইবে। (বো. প্র., ১৯২০)

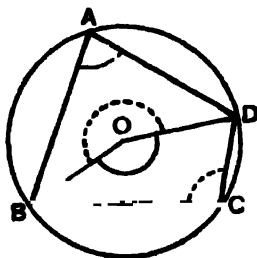
১১। কোন বৃত্তের AB জ্যার উপর অবস্থিত চাপের P একটি বিন্দু। APকে Q পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন PQ = PB হয়। এখন BQএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (ক. প্র., ১৯৩৫, ঐচ্ছিক)

[সঙ্কেত: C ও L যথাক্রমে AB ও BQএর মধ্যবিন্দু হইলে, $\angle BLC = \frac{1}{2} \angle APB$ হইবে।]

১২৯। **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ** (Cyclic quadrilateral)। যদি কোন চতুর্ভুজের চারি শীর্ষ দিয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়, তবে ঐ চতুর্ভুজকে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলে।

উপপাদ্য ৩৬

কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

[The opposite angles of a cyclic quadrilateral are together equal to two right angles.]

মনে কর ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ ;

এবং $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ।

মনে কর O, বৃত্তের কেন্দ্র। OB ও OD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। BCD চাপের উপর দণ্ডায়মান

পরিধিস্থ $\angle BAD = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$;

এইরূপ, পরিধিস্থ $\angle BCD = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD$।

$\therefore\ \angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}$ ($\angle BOD +$ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD$)

$= \frac{1}{2}.4$ সমকোণ

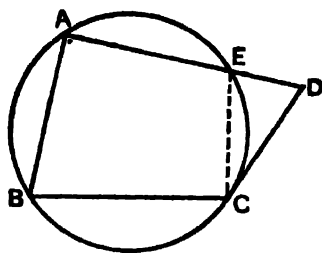
$= 2$ সমকোণ।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৩৬ (ক)

যদি কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তবে উহা একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হইবে।

[If two opposite angles of a quadrilateral are together equal to two right angles, it is cyclic.]

মনে কর ABCD একটি চতুর্ভুজ ; এবং উহার ABC ও ADC কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C ও D বিন্দুগুলি একবৃত্তস্থ হইবে।

মনে কর A, B ও C দিয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। যদি ঐ বৃত্ত D বিন্দু দিয়া না যায়, মনে কর উহা ADকে অথবা বর্দ্ধিত ADকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∵ ABCE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ $\angle$AEC, $\angle$ABCএর সম্পূরক।

কিন্তু, $\angle$ADC, $\angle$ABCএর সম্পূরক (কল্পনা)

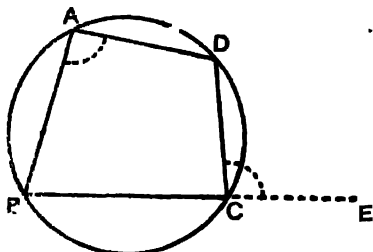
∴ $\angle$AEC = $\angle$ADC ;

অর্থাৎ, বহিঃকোণ, দূরবর্ত্তী অন্তঃকোণের সমান ; কিন্তু, ইহা অসম্ভব।

∴ A, B ও C বিন্দুগামী বৃত্ত D বিন্দু দিয়া যাইবে ;

অর্থাৎ, A, B, C ও D বিন্দুগুলি একবৃত্তস্থ হইবে। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের এক বাহু বর্দ্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহা ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত অন্তঃকোণের সমান।

বিপরীত ক্রমে, যদি বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হয়, তাহা হইলে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হইবে।

পার্শ্বের চিত্রে, চতুর্ভুজ ABCD বৃত্তস্থ হইলে, $\angle DCE = \angle BAD$ হইবে। বিপরীতক্রমে, যদি $\angle DCE = \angle BAD$ হয়, তাহা হইলে ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হইবে।

মন্তব্য। ৩৬ (ক) উপপাদ্য, ৩৬ উপপাদ্যের বিপরীত।

অনুশীলনী ৪২

*১। যদি কোন সামান্তরিকের চতুর্দ্দিকে একটি পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়, তবে ঐ সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

(ক. প্র., ১৯২৫)

২। ABC এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ; এবং BC ভূমির সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত XY সরল রেখা ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে B, C, X ও Y একবৃত্তস্থ হইবে।

(এ. প্র., ১৯৩১)

৩। কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের বহির্দ্দিকের তিনটি বৃত্তাংশস্থ কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

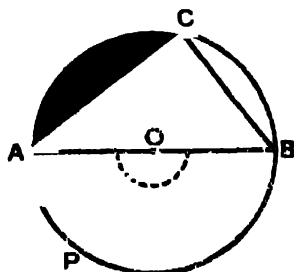
*৪। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর উহার বাহিরের দিকে তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে এই তিন সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তগুলি একই বিন্দুতে ছেদ করিবে। (ক. প্র., ১৯২৩)

৫। প্রমাণ কর যে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক উভয়ে বৃত্তের উপর ছেদ করে। (ক. প্র., ১৯২৪)

*৬। প্রমাণ কর যে কোন চতুর্ভুজের কোণগুলির দ্বিখণ্ডক বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে। (ক. প্র., ১৯২৫)

উপপাদ্য ৩৭

অর্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ হইবে।

[The angle in a semicircle is a right angle.]

মনে কর APBC একটি বৃত্ত, O, উহার কেন্দ্র, এবং AB একটি ব্যাস। মনে কর C পরিধিস্থ যে কোন একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ACB = এক সমকোণ।

প্রমাণ। APB চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ ∠ACB, কেন্দ্রস্থ ∠AOBএর অর্দ্ধেক।

কিন্তু, ∠AOB = এক সরল কোণ = দুই সমকোণ;

∴ ∠ACB = দুই সমকোণের অর্দ্ধেক

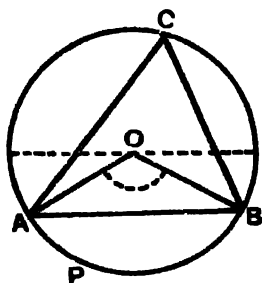
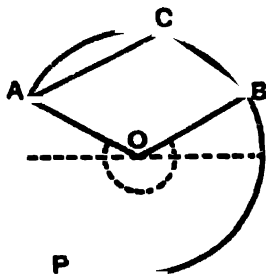
= এক সমকোণ। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। অর্দ্ধবৃত্ত হইতে বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ; এবং অর্দ্ধবৃত্ত হইতে ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

APB চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ ∠ACB
কেন্দ্রস্থ ∠AOBএর অর্দ্ধেক।

(ক) যদি ACB বৃত্তাংশ অর্দ্ধবৃত্ত হইতে বৃহত্তর হয় (প্রথম চিত্র), তবে APB চাপ উপচাপ (minor arc) হইবে;

∴ APB চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠AOB, দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

∴ ∠ACB, ∠AOBএর অর্দ্ধেক হওয়ায়, উহা এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ।

(খ) যদি ACB চাপ অর্দ্ধবৃত্ত হইতে ক্ষুদ্রতর হয়, তবে APB চাপ অধিচাপ (major arc) হইবে (দ্বিতীয় চিত্র);

∴ APB চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠AOB দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;

∴ ∠ACB, ∠AOBএর অর্দ্ধেক বলিয়া উহা এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর অর্থাৎ স্থূলকোণ।

অনুশীলনী ৪৩

*১। কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ঐ বৃত্ত অতিভুজের বিপরীত শীর্ষ দিয়া যাইবে।

(ক. প্র., ১৯২৭)

২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটিকে ব্যাস লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

*৩। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুকে ব্যাস লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহারা তৃতীয় বাহুকে অথবা বর্দ্ধিত তৃতীয় বাহুকে একই বিন্দুতে ছেদ করিবে।

৪। দুই বৃত্ত M ও N বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি M বিন্দু হইতে MA ও MB ব্যাসদ্বয় অঙ্কিত করা হয়, তবে প্রমাণ কর যে AN ও BN একই সরল রেখায় অবস্থিত থাকিবে।

৫। ABC ত্রিভুজের ∠Aএর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে আবার X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে XY ঐ পরিবৃত্তের একটি ব্যাস।

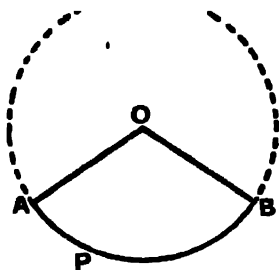
৬। AD, A বিন্দু হইতে ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর লম্ব; এবং AE, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের একটি ব্যাস। প্রমাণ কর যে ABD ও AEC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণ; এবং ACD ও AEB ত্রিভুজদ্বয়ও সদৃশকোণ।

৭। S, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র। AS সরল রেখা পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। ABএর সহিত লম্ব করিয়া CD টানা হইলে প্রমাণ কর যে CD, BPএর সহিত সমান্তরাল; এবং ∠CAP = ∠BCD।

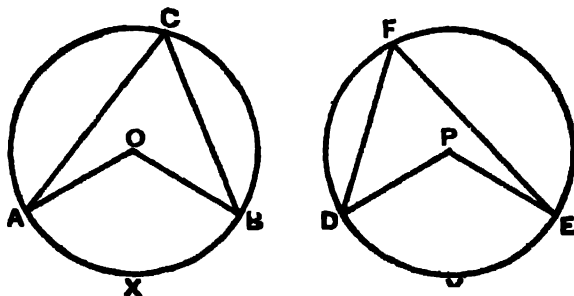
*৮। দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যথাক্রমে অঙ্কিত দুই সরল রেখা যদি লম্বভাবে ছেদ করে তবে ঐ ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(ক. প্র., ১৯১৭)

১৩০। **বৃত্তকলা।** কোন বৃত্তের দুই ব্যাসার্দ্ধ ও উহাদের অন্তর্গত চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানকে **বৃত্তকলা** (Sector) বলে।

পার্শ্বের চিত্রে, AOBP একটি বৃত্তকলা।

উপপাদ্য ৩৮

সমান সমান অথবা একই বৃত্তের যে সকল চাপ কেন্দ্রে অথবা পরিধিতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, উহারা পরস্পর সমান।

[In equal circles or in the same circle, arcs which subtend equal angles either at the centre, or at the circumference, are equal.]

মনে কর ABC ও DEF, এই সমান বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রস্থ AOB এবং DPE কোণদ্বয় পরস্পর সমান। তাহা হইলে, পরিধিস্থ ACB এবং DFE কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AXB চাপ = DYE চাপ।

প্রমাণ। DEF বৃত্তকে ABC বৃত্তের উপর এরূপে স্থাপন কর যেন P কেন্দ্র O কেন্দ্রের উপর ও PD ব্যাসার্দ্ধ OA ব্যাসার্দ্ধের উপর পড়ে।

এখন, $\because$ $\angle$DPE = $\angle$AOB (কল্পনা)

$\therefore$ PE, OBএর উপর পড়িবে।

এবং $\because$ উভয় বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধগুলি পরস্পর সমান,

$\therefore$ D বিন্দু A বিন্দুর উপর এবং E বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়িবে, এবং বৃত্ত দুইটির পরিধিও সর্ব্বতোভাবে মিলিয়া যাইবে।

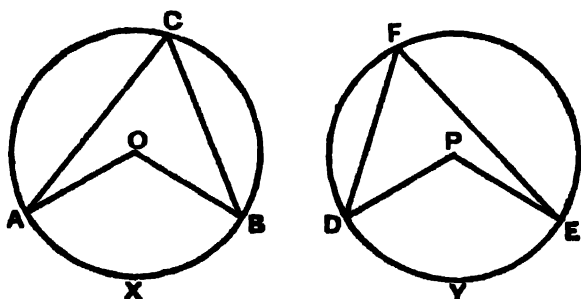
অতএব DYE চাপ, AXB চাপের সহিত মিলিয়া যাইবে।

$\therefore$ AXB চাপ = DYE চাপ।

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে এই সিদ্ধান্তটি একই বৃত্তের পক্ষেও প্রযোজ্য; কারণ, একই বৃত্তের দুই চাপকে দুইটি সমান সমান বৃত্তস্থ মনে করা যায়। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৩৯

সমান সমান অথবা একই বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

[In equal circles or in the same circle, angles either at the centre or at the circumference, which stand on equal arcs, are equal.]

ABC ও DEF, এই সমান সমান বৃত্তদ্বয়ের AXB ও DYE চাপদ্বয় পরস্পর সমান। প্রমাণ করিতে হইবে যে

কেন্দ্রস্থ $\angle$AOB = কেন্দ্রস্থ $\angle$DPE ;

এবং পরিধিস্থ $\angle$ACB = পরিধিস্থ $\angle$DFE।

প্রমাণ। DEF বৃত্তকে ABC বৃত্তের উপর এরূপে স্থাপন কর যেন P কেন্দ্র O কেন্দ্রের উপর এবং PD ব্যাসার্দ্ধ OA ব্যাসার্দ্ধের উপর পড়ে।

$\because$ বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্দ্ধ পরস্পর সমান,

$\therefore$ D বিন্দু A বিন্দুর উপর পড়িবে এবং উহাদের পরিধিও পরস্পর মিলিয়া যাইবে।

এখন, DYE চাপ AXB চাপের সমান বলিয়া E বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়িবে।

∴ PE, OBএর সহিত মিলিয়া যাইবে।

∴ ∠AOB = ∠DPE।

আবার, ∵ পরিধিস্থ ∠ACB = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠AOB

এবং পরিধিস্থ ∠DFE = $\frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ ∠DPE।

∴ ∠ACB = ∠DFE।

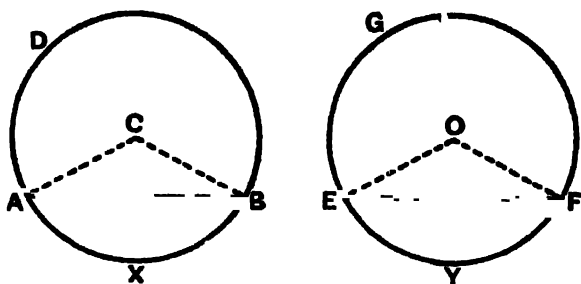
স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে এই সিদ্ধান্তটি একই বৃত্তের পক্ষেও প্রযোজ্য।

ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৪০

সমান সমান অথবা একই বৃত্তে সমান সমান জ্যা যে সকল চাপ উৎপন্ন করে তাহারা পরস্পর সমান; এই চাপগুলির মধ্যে অধিচাপ অধিচাপের এবং উপচাপ উপচাপের সমান।

[In equal circles or in the same circle arcs cut off by

equal chords are equal, the major arc equal to the major arc, and the minor to the minor.]

মনে কর DAB এবং GEF দুইটি সমান বৃত্ত : C এবং O, যথাক্রমে উহাদেব কেন্দ্র। মনে কর AB জ্যা = EF জ্যা।

প্রমাণ কবিতে হইবে যে উপচাপ AXB = উপচাপ EYF :
এবং অধিচাপ ADB = অধিচাপ EGF।

প্রমাণ। CA, CB, OE ও OF সংযুক্ত কব
এখন, CAB এবং OEF ত্রিভুজ দুইটির

CA = OE } (∵ সমান সমান বৃত্তেব ব্যাসার্দ্ধ)
CB = OF }
AB = EF (কল্পনা)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম।

∴ ∠ACB = ∠EOF।

সুতবাং, AXB চাপ = EYF চাপ ; (৩৮ উপ.)

এবং ইহারা উপচাপ।

কিন্তু, সমগ্র পরিধি DAXB = সমগ্র পরিধি GEYF ;

∴ অবশিষ্ট চাপ ADB = অবশিষ্ট চাপ EGF ;

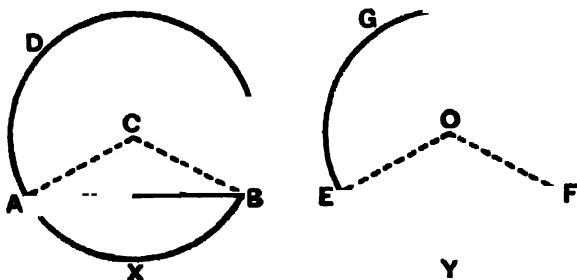
এবং ইহারা অধিচাপ।

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে এই সিদ্ধান্ত একই বৃত্ত সম্বন্ধেও প্রযোজ্য।

ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৪১

সমান সমান বৃত্তে অথবা একই বৃত্তে সমান সমান চাপের জ্যাগুলি পরস্পর সমান।

[In equal circles or in the same circle, chords which cut off equal arcs are equal.]

মনে কর DAB ও GEF দুইটি সমান বৃত্ত, এবং উহাদের AXB ও EYF চাপদ্বয় পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB জ্যা = EF জ্যা।

প্রমাণ। CA, CB এবং OE, OF সংযুক্ত কর।

∵ বৃত্তগুলি সমান এবং AXB ও EYF চাপদ্বয় সমান,

∴ ∠ACB = ∠EOF। (৩৯ উপপাদ্য)

এখন, CAB এবং OEF ত্রিভুজদ্বয়ের

CA = OE, CB = OF (∵ সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ)

এবং অন্তর্ভূত ∠ACB = অন্তর্ভূত ∠EOF ;

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম :

∴ AB জ্যা = EF জ্যা।

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে এই সিদ্ধান্তটি একই বৃত্ত সম্বন্ধেও প্রযোজ্য হইবে। ই. উ. বি.

মন্তব্য। ৪০ উপপাদ্যের সাহায্যে যে কোন চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করা যাইতে পারে (২৪ সম্পাদ্য দেখ)।

অনুশীলনী ৪৪

*১। O, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র। যদি ∠AOB = ∠BOC = ∠COA হয়, প্রমাণ কর যে ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

*২। কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবর্ত্তী চাপদ্বয় পরস্পর সমান।

*৩। দুইটি ব্যাস পরস্পর লম্ব হইলে উহারা বৃত্তের পরিধিকে সমান চারি অংশে বিভক্ত করে।

৪। এক বৃত্তের পরিধিকে আট সমান অংশে বিভক্ত করিয়া ভাগ-বিন্দুগুলিকে কেন্দ্রের সহিত সংযুক্ত করা হইল। এক একটি বৃত্তকলার কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

৫। দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। যদি A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে কোন একটি সরল রেখা পরিধিদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে আবার ছেদ করে, প্রমাণ কর যে BP = BQ। (ক. প্র., ১৯২৮)

৬। দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। যদি A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে কোন একটি সরল রেখা পরিধিদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে আবাব ছেদ করে, PQএব মধ্যবিন্দুব সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। AB, কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তেব একটি নির্দ্দিষ্ট জ্যা; এবং P, পবিধির উপব যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে APB কোণের দ্বিখণ্ডক, দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুব কোন একটি দিয়া যাইবে। (ক. প্র., ১৯২৩, ঐচ্ছিক)

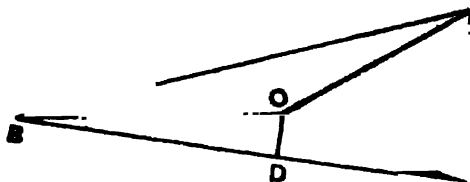
*৮। প্রমাণ কব যে কোন বৃত্তাংশস্থ কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ঐ বৃত্তাংশের চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৯। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCDএর AB = CD; প্রমাণ কর যে AD ও BC পরস্পর সমান্তরাল এবং AC = BD।

*১০। দুইটি জ্যা পরস্পর লম্ব। উহারা বৃত্তের পরিধিকে যে চারিটি চাপে বিভক্ত করে, তাহাদের যে কোন দুইটি একান্তর চাপের সমষ্টি সমস্ত পরিধির অর্দ্ধেক হইবে।

১১। ABC ত্রিভুজের ∠Aএর দ্বিখণ্ডক ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। ∠Cকে CI দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল; এবং CI, AEকে I বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে EB, EC, EI পরস্পর সমান। (বো. প্র., ১৯২৩)

১২। কোন ছাত্র নিম্নলিখিত ভাবে প্রমাণ করিল যে সব ত্রিভুজই সমবাহু; তাহার কোথায় ভুল হইল দেখাও।

প্রমাণ। যে কোন △ABC লও। মনে কর ∠Aএর দ্বিখণ্ডক এবং BC বাহুর লম্ব-দ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হইল। ∴ OB = OC।

এখন, △AOB ও △AOCএর

OA = OA

OB = CC

∠BAO = ∠CAO ; (অঙ্কন)

∴ ২০ উপপাদ্য অনুসারে, △AOB ও △AOC হয় সর্ব্বসম, না হয়, ∠OBA + ∠OCA = 2 সমকোণ।

কিন্তু, ত্রিভুজের কোণের অংশ বলিয়া ∠OBA এবং ∠OCA এর সমষ্টি 2 সমকোণ হইতে পারে না, (∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ)।

∴ △AOB ও △AOC সর্ব্বসম।

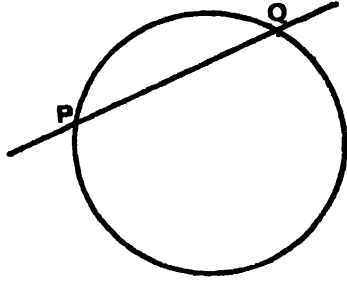
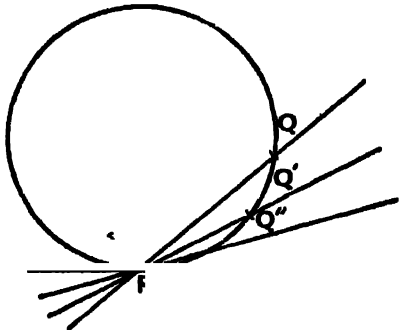
অতএব, AB = AC।

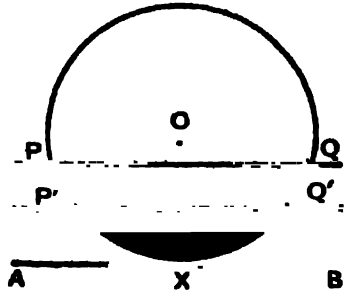
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে AC = BC,

∴ AB = AC = BC ;

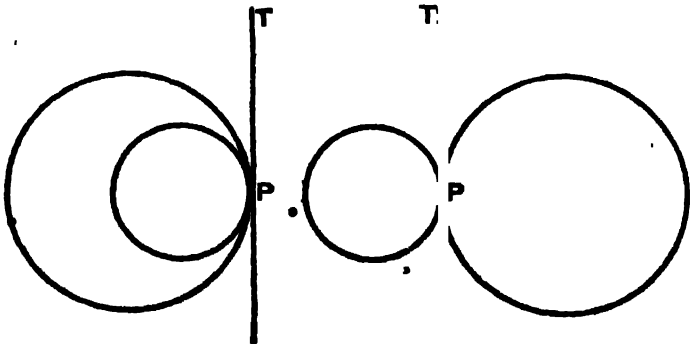
অর্থাৎ, △ABC সমবাহু।

স্পর্শক (Tangent)

১৩১। **ছেদক** (Secant)। যে অনির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যযুক্ত সরল রেখা কোন বৃত্তের পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে **ছেদক** বলে। পার্শ্বের চিত্রে PQ একটি ছেদক।

১৩২। মনে কর PQ একটি ছেদক, এবং P ও Q উহার ছেদবিন্দু। PQকে P বিন্দুর চারিদিকে ঘুরাইলে উহার অপর ছেদবিন্দুটি ক্রমশঃ Pএর নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিবে (চিত্র দেখ); এবং এরূপে উহাকে এমন একটি অবস্থান PTতে আনা যাইবে যেখানে অপর ছেদ বিন্দুটি Pএর সহিত মিলিয়া যাইবে। এই অবস্থানে, ছেদককে বৃত্তের **স্পর্শক** বলে, এবং যে বিন্দুতে স্পর্শক বৃত্তের সহিত মিলিত হয় উহাকে **স্পর্শবিন্দু** (Point of contact) বলা হয়।

উপরের চিত্রে, PT একটি স্পর্শক; এবং P, উহার স্পর্শবিন্দু।

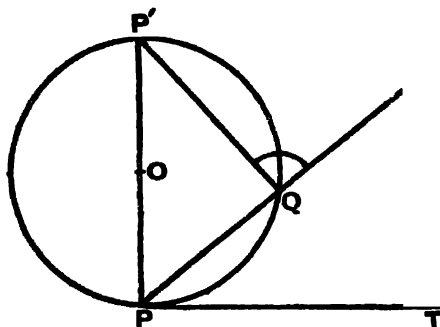
আবার, যদি PQ ছেদককে সমান্তরাল ভাবে কেন্দ্র হইতে ক্রমশঃ দূরে সরাইয়া লওয়া যায়, তাহা হইলে উহার ছেদবিন্দুদ্বয় ক্রমশঃ নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিবে (চিত্র দেখ), এবং উহাকে এমন একটি অবস্থান ABতে আনা যাইবে যেখানে ঐ ছেদবিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিয়া যাইবে। এই অবস্থানে উহা বৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে।

উপরের চিত্রে, AB একটি স্পর্শক এবং X, উহার স্পর্শবিন্দু।

অতএব, যদি কোন সরল রেখা একটি বৃত্তকে দুইটি সমাপতিত (Coincident) বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে উহাকে বৃত্তের **স্পর্শক** বলে, এবং উক্ত বিন্দুকে **স্পর্শবিন্দু** বলা হয়।

১৩৩। দুইটি বৃত্ত এক বিন্দুতে মিলিত হইলে এবং ঐ বিন্দুতে উহাদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকিলে, **বৃত্ত দুইটি পরস্পর স্পর্শ**

করিয়াছে বলা হয়; এবং বৃত্তদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে কিংবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইলে উহারা যথাক্রমে পরস্পর **অন্তঃস্থভাবে** বা **বহিঃস্থভাবে** স্পর্শ করিয়াছে বলা হয়।

উপপাদ্য ৪২

বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও ব্যাসার্দ্ধ পরস্পর লম্ব হইবে।

[The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through that point.]

মনে কর O, কোন বৃত্তের কেন্দ্র, এবং PT ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

PO সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে PT ও PO পরস্পর লম্ব হইবে।

P বিন্দু দিয়া ব্যাস PP′ ও যে কোন ছেদক PQR টান। PQR, বৃত্তকে যেন Q বিন্দুতে ছেদ করিল। P′Q সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∵ PQP′ একটি অর্দ্ধবৃত্ত ;

∴ ∠PQP′ = এক সমকোণ ; (৩৭ উপপাদ্য)

∴ ∠P′QR = এক সমকোণ।

এখন, যদি Q ক্রমশঃ Pএর নিকটবর্ত্তী হয় এবং পরিশেষে Pএর সহিত মিলিয়া যায় তখন PQR, বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। কিন্তু, তখন P′Q, P′Pএর সহিত, এবং PQR, PTএর সহিত মিলিয়া যাইবে।

∴ ∠P′QR, ∠P′PTএর সহিত মিলিয়া যাইবে।

কিন্তু, Q বিন্দুর সর্ব্বাবস্থানে $\angle P'QR$, এক সমকোণ।

$\therefore$ $\angle P'PT$ অর্থাৎ $\angle OPT$ = এক সমকোণ;

$\therefore$ PT ও PO পরস্পর লম্ব। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। P বিন্দু হইতে OP ব্যাসার্দ্ধের উপর একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত করা যায়; অতএব, বৃত্তের পরিধির কোন বিন্দুতে কেবলমাত্র একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। বৃত্তের কোন বিন্দু হইতে ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্দ্ধের উপর লম্ব, বৃত্তকে উক্ত বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। স্পর্শবিন্দু হইতে স্পর্শকের উপর লম্ব টানিলে ঐ লম্ব কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৪। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে স্পর্শকের উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে ঐ লম্ব স্পর্শবিন্দু দিয়া যাইবে।

অনুশীলনী ৪৫

*১। বৃত্তের কোন ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি সমান্তরাল হইবে।

*২। কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শক সমান্তরাল হইলে তাহাদের স্পর্শ-বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা একটি ব্যাস হইবে।

৩। দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রীয় হইলে বৃহত্তর বৃত্তের যে সকল জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে স্পর্শ করে তাহারা পরস্পর সমান। (ক. প্র., ১৮৬৮)

*৪। দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রীয় হইলে এবং বৃহত্তর বৃত্তের কোন জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে স্পর্শ করিলে, ঐ জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।
(ক. প্র., ১৯০৪)

৫। ABC একটি বৃত্তাংশ। যদি এই বৃত্তাংশস্থ কোণ অর্দ্ধসমকোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে জ্যার প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইবে। (এ. প্র., ১৯৩৪)

৬। যদি কোন বৃত্তের পরিধি তিন বিন্দু দ্বারা তিন সমান চাপে বিভক্ত হয় তবে ঐ বিন্দুত্রয় দিয়া বৃত্তের স্পর্শক টানিলে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে। (ক. প্র., ১৯২৯)

৭। একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল করিয়া কিরূপে একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে দেখাও। এরূপ কয়টি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়? (ক. প্র., ১৯৩২)

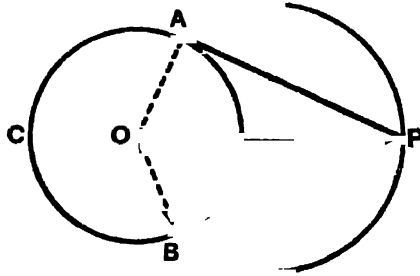
*৮। এক বৃত্তের কোন বিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকের সহিত সমান্তরাল যাবতীয় জ্যাগুলি ঐ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসের দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (ক. প্র., ১৯১৮)

*৯। যে সকল বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (ক. প্র., ১৯১৬)

*১০। যদি কোন বিন্দু এরূপভাবে সঞ্চরণ করে যে উহা হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকগুলি একই নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট হয়, তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (ক. প্র., ১৯২২)

উপপাদ্য ৪৩

কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

[Two tangents can be drawn to a circle from an external point.]

মনে কর P, ABC বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু; এবং O, ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ করিতে হইবে যে P বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

OP সংযুক্ত কর; এবং উহাকে ব্যাস লইয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত কর। ইহা যেন ABC বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল।

PA, PB, OA ও OB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। PAO এবং PBO কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে অর্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া উহারা প্রত্যেকে এক সমকোণ;

অর্থাৎ, PA ও PB যথাক্রমে OA ও OB ব্যাসার্দ্ধের উপব লম্ব।

∴ PA ও PB প্রত্যেকে ABC বৃত্তের স্পর্শক।

অতএব, বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে ABC বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। একটি বৃত্তের উপর উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান এবং উহারা কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। (ক. প্র., ১৯২৩, ১৯২৯)

প্রমাণ। সমকোণী ত্রিভুজ PAO এবং PBOএর
অতিভুজ OP = অতিভুজ OP
OA = OB
∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্ব্বসম।
∴ PA = PB , এবং ∠POA = ∠POB।

অনুশীলনী ৪৬

*১। যদি দুই সবল রেখা পরস্পর ছেদ কবে এবং উহাদেব উভযকে স্পর্শ কবিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কিত কবা হয় তবে ঐ বৃত্তেব কেন্দ্র সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূর্ত কোণের দ্বিখণ্ডকেব উপর অবস্থিত থাকিবে।

২। দুই বৃত্ত বহিঃস্থভাবে A বিন্দুতে পরস্পবকে স্পর্শ করিল। যদি একটি সবল বেখা উভয বৃত্তকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে প্রমাণ কর যে BAC কোণ এক সমকোণ। (ক. প্র., ১৯১৩, ঐচ্ছিক)

৩। কোন বৃত্তেব দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক অপর একটি স্পর্শকের যে অংশ ছেদ করে সেই অংশ বৃত্তের কেন্দ্রে এক সমকোণ উৎপন্ন করিবে। (বো. প্র., ১৮৮৩)

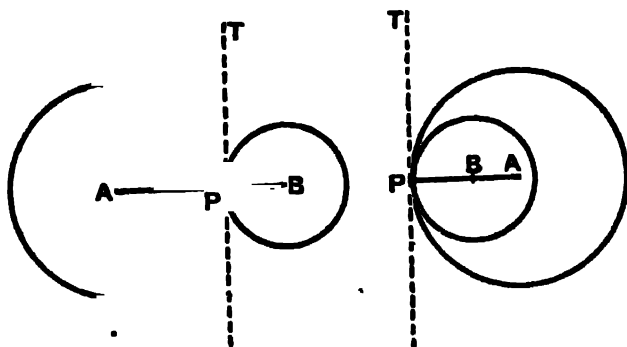
*৪। কোন বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া একটি চতুর্ভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে ঐ চতুর্ভুজের যে কোন দুই বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর দুই বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান। (ক. প্র., ১৯৩১)

*৫। বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিক রম্বস হইবে।

*৬। কোন বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের দুই বিপরীত বাহু বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে তাহারা একত্রযোগে দুই সমকোণের সমান। (বো. প্র., ১৯৩৫)

উপপাদ্য ৪৪

দুই বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থিত থাকিবে।

[If two circles touch, their centres and the point of contact lie on a straight line.]

মনে কর A এবং B-কেন্দ্র বৃত্তদ্বয় পবস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করিযাছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B ও P বিন্দুত্রয় একই সরল রেখায় থাকিবে।

AP ও BP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∵ দুইটি বৃত্ত পরস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে;

∴ P বিন্দু দিয়া উভয় বৃত্তের এক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

মনে কর PT উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক।

∵ A-কেন্দ্র বৃত্তের P বিন্দুতে, PT স্পর্শক, এবং PA, ব্যাসার্দ্ধ;

∴ PA, PTএর উপর লম্ব;

এইরূপ, PB, PTএর উপর লম্ব।

∴ PA ও PB একই সরল রেখায় অবস্থিত হইবে।

অর্থাৎ, A, P ও B বিন্দুত্রয় একই সরল রেখায় থাকিবে। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। যদি দুই বৃত্ত বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে, তাহা হইলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্দ্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২। যদি দুই বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে, তবে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্দ্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান।

অনুশীলনী ৪৭

*১। যদি কতকগুলি বৃত্ত পরস্পরকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে ঐ সকল বৃত্তের কেন্দ্রগুলি একই সরল রেখায় অবস্থিত থাকিবে।

(ক. প্র., ১৯১২)

*২। একটি x ফুট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট চাকা a ফুট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট অপর একটি স্থির চাকার উপর উহার বহির্দ্দিকে ঘুরিতে থাকিলে পূর্ব্বোক্ত চাকার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*৩। ২য় প্রশ্নে যদি প্রথম চাকাটি দ্বিতীয় চাকার ভিতর দিকে ঘুরিতে থাকে, তাহা হইলে সঞ্চারপথ কিরূপ হইবে?

৪। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে এক বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি উহাদের স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন সরল রেখা বৃত্ত দুইটির পরিধিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে (ক) A ও B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্দ্ধদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল; এবং (খ) A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

*৫। দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ যথাক্রমে a ফুট ও b ফুট। যদি উহারা পরস্পরকে স্পর্শ করে, প্রমাণ কর যে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $(a+b)$ বা $(a \sim b)$ ফুট হইবে। ইহা হইতে দেখাও যে কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া কোন নির্দ্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কিত করা যায। এরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে?

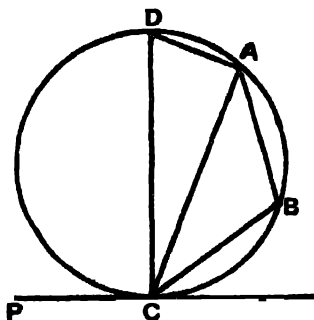
৬। x, y ও z ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। উহাদেব কেন্দ্রত্রয় যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাহার বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ইহা হইতে দেখাও কিরূপে তিনটি নির্দ্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় যেন উহারা পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

*৭। কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। এইরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়?

উপপাদ্য ৪৫

বৃত্তের স্পর্শক স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত কোন জ্যার সহিত যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে উহারা যথাক্রমে একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণদ্বয়ের সমান।

[The angles which a tangent to a circle makes with a chord drawn through the point of contact are respectively equal to the angles in the alternate segments of the circle.]

মনে কর DCA একটি বৃত্ত; এবং উহার C বিন্দুতে, স্পর্শক PCT যে কোন জ্যা CA অঙ্কিত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$\angle$ACT = একান্তর ADC বৃত্তাংশস্থ কোণ।

এবং $\angle$ACP = একান্তর ABC বৃত্তাংশস্থ কোণ।

C বিন্দু দিয়া CD ব্যাস অঙ্কিত কর।

ABC উপচাপের উপর যে কোন একটি বিন্দু B লও।

AD, AB ও BC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∵ CD, একটি ব্যাস

∴ অর্দ্ধবৃত্তস্থ ∠DAC = এক সমকোণ।

∴ ∠ADC + ∠ACD = এক সমকোণ।

আবার, ∵ স্পর্শক PCT, ব্যাস CDএর উপর লম্ব,

∴ ∠DCT = এক সমকোণ;

∴ ∠ACT + ∠ACD = এক সমকোণ।

∴ ∠ACT + ∠ACD = ∠ADC + ∠ACD।

উভয় পক্ষ হইতে ∠ACD বাদ দিলে,

∠ACT = ∠ADC = একান্তর ADC বৃত্তাংশস্থ কোণ।

আবার, ∵ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

∴ ∠ABC, ∠ADCএর সম্পূরক;

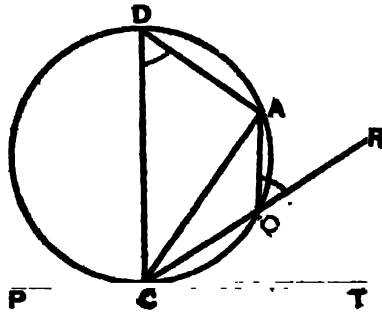
∴ ∠ABC, ∠ACTএর সম্পূরক।

কিন্তু, ∠ACP, ∠ACTএর সম্পূরক;

∴ ∠ACP = ∠ABC = একান্তর ABC বৃত্তাংশস্থ কোণ।

ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৪৫

(বিকল্প প্রমাণ)

মনে কর CT, CAD বৃত্তের কোন স্পর্শক; CA, যে কোন জ্যা; এবং D, ADC বৃত্তাংশের কোন বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle ACT =$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ADC$।

C বিন্দু দিয়া যে কোন ছেদক CQR অঙ্কিত কর। ইহা যেন বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

QA সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\because$ AQCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

$\therefore \angle AQR = \angle ADC$ (৩৬ক উপ., অনু.)

মনে কর Q ক্রমশঃ Cএর নিকটবর্ত্তী হইয়া অবশেষে Cএর সহিত মিলিয়া গেল। তাহা হইলে ছেদক CQR, CT স্পর্শকে পরিণত হইবে, এবং $\angle AQR$, $\angle ACT$ হইবে।

কিন্তু, Q বিন্দুর সর্ব্বাবস্থানে $\angle AQR = \angle ADC$;

$\therefore \angle ACT = \angle ADC$। ই. উ. বি.

অনুশীলনী ৪৮

*১। ৪৫ উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য প্রমাণ কর।

*২। কোন বৃত্তের AB ও AC জ্যাদ্বয় পরস্পর সমান। প্রমাণ কর যে A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক BCএর সহিত সমান্তরাল হইবে।
(এ. প্র., ১৯৩৫)

৩। একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে থাকিয়া অপর একটি বৃত্ত উহাকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিতেছে। ABC ও ADE সরল রেখাদ্বয় A বিন্দু দিয়া এরূপে অঙ্কিত করা হইল যে উহারা বৃত্ত দুইটিকে যথাক্রমে B ও C, এবং D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কব যে BD ও CE পরস্পর সমান্তরাল।

*৪। এক জ্যার সহিত সমান্তরাল করিয়া এক স্পর্শক অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে জ্যা দ্বারা কর্তিত চাপ স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। (ঢা. প্র., ১৯৩২)

৫। দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিল। যদি উহাদিগকে ছেদ করিয়া একটি সরল রেখা টানা যায়, তবে প্রমাণ কর যে দুই বৃত্তের অন্তর্গত ঐ সরল রেখার অংশ দুইটি স্পর্শবিন্দুতে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিবে। (ক. প্র., ১৯২৪)

*৬। ABC ত্রিভুজের শীর্ষগুলি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইয়াছে। A, B ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকত্রয় PQR ত্রিভুজ উৎপন্ন করিলে প্রমাণ কর যে এই ত্রিভুজের যে কোনও কোণ, ABC ত্রিভুজের অনুরূপ কোণের দ্বিগুণের সম্পূরক। (বো. প্র., ১৯২১)

৭। কোন বৃত্তের একই বিন্দু দিয়া একটি জ্যা ও একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে, প্রমাণ কর যে উক্ত জ্যা দ্বারা উৎপন্ন চাপদ্বয়ের যে-কোনটির মধ্যবিন্দু হইতে ঐ জ্যা ও স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় পরস্পর সমান হইবে। (ক. প্র., ১৯১৫, ঐচ্ছিক)

৮। AB, একটি বৃত্তের ব্যাস; এবং O, উহার কেন্দ্র। ABএর একই পার্শ্বস্থ AC এবং BD জ্যাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে C, D ও E বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের OC একটি স্পর্শক। (ক. প্র., ১৯২৪)

৯। দুই বৃত্ত A বিন্দুতে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিল। A বিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ স্পর্শকের P বিন্দু হইতে ভিতরের বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া এক সরল রেখা টানা হইল এবং ঐ সরল রেখা বৃহত্তর বৃত্তকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে AQ, ∠RASকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। (বো.প্র., ১৯৩২)

১০। ABC ত্রিভুজের ACB কোণকে CE দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল; এবং CE, ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। ABএর বর্দ্ধিত অংশের উপর এরূপ একটি বিন্দু D লওয়া হইল যেন ∠ECD = ∠CED হয়। প্রমাণ কর যে CD, A, C ও B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। (বো. প্র., ১৯১৯)

*১১। বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে এমন এক সরল রেখা অঙ্কিত কর যাহা ঐ বৃত্তে একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যযুক্ত জ্যা উৎপন্ন করিবে।

[সঙ্কেত: বৃত্তে নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান করিয়া যে কোন একটি জ্যা টান। ঐ জ্যাকে স্পর্শ করিয়া একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কিত কর। এখন, নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে শেষোক্ত বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া একটি জ্যা টান।]

*১২। বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া এমন একটি বৃত্তাংশ কাটিয়া লও যাহার অন্তর্গত কোণ একটি নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

[সঙ্কেত: বৃত্তের কোন বিন্দুতে নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত কর এবং ঐ কোণের বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত জ্যার সমান করিয়া নির্দ্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু হইতে অপর একটি জ্যা অঙ্কিত কর (১১ প্রশ্ন দেখ)।]

অনুশীলনী ৪৯

(বিবিধ প্রশ্ন)

*১। P, কোন বৃত্তের (ক) বহিঃস্থ ; (খ) অভ্যন্তরস্থ এক বিন্দু ; এবং O, ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। যদি PO সরল রেখা বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে এবং PB > PA হয় তবে প্রমাণ কর যে, উভয় স্থলে P হইতে বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত যত সরল রেখা অঙ্কিত করা যায় উহাদের মধ্যে PA ক্ষুদ্রতম ও PB বৃহত্তম।

[সঙ্কেত : পরিধির উপর যে কোন একটি বিন্দু Q লও। OQ এবং PQ সংযুক্ত করিয়া △PQO হইতে ১১শ উপপাদ্য দ্বারা প্রমাণ কর যে PQ > PA ; এবং PB > PQ।

২। দুই বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি A ও B হইতে অঙ্কিত CAD ও EBF সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয় উক্ত বৃত্ত দুইটির পরিধিকে যথাক্রমে C, D এবং E, F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে CD = EF।

*৩। A ও B কোন বৃত্তের পরিধিস্থ দুইটি বিন্দু। A ও B দিয়া দুইটি সমান ও সমান্তরাল জ্যা কিরূপে অঙ্কিত করিতে পারা যায় দেখাও।

৪। কোন বৃত্তের যে কোন ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট জ্যার উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির সমষ্টি অথবা অন্তরফল সর্ব্বদা সমান হইবে ; (ব্যাস জ্যার একই পার্শ্বে অবস্থিত থাকিলে সমষ্টি, এবং জ্যাকে ছেদ করিলে অন্তরফল লইতে হইবে।)

*৫। যে সকল বৃত্ত একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং যাহাদের কেন্দ্রগুলি একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর অবস্থিত থাকে তাহারা অন্য একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়াও যাইবে।

৬। এক বৃত্তের উপর A ও B দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। AP ও BQ যে কোন দুইটি সমান্তরাল জ্যা। PQ-জ্যার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৭। ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। ∠A, ∠B, ∠Cএর দ্বিখণ্ডকগুলি বৃত্তের পরিধিকে যথাক্রমে X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করিলে, XYZ ত্রিভুজের কোণগুলিকে ABC ত্রিভুজের কোণ দ্বারা প্রকাশ কব। (ক. প্র., ১৮৯৪)

*৮। দুই বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের সাধারণ জ্যা যদি কেন্দ্রদ্বয়ে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে প্রমাণ কর যে বৃত্ত দুইটি পরস্পর সমান।

৯। ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে △DEFএর কোণগুলি যথাক্রমে △ABCএর কোণগুলির অর্দ্ধেকের পূরক হইবে। (বো. প্র., ১৯২৩)

১০। ABC ত্রিভুজের A হইতে BCএর উপর AD লম্ব টানা হইল, এবং AD, △ABCএর পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি AB = AC = 5 সে. মি. এবং BC = 8 সে. মি. হয়, AEএর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং উহা হইতে বৃত্তেব ব্যাসার্দ্ধ নির্ণয় কর।

১১। PQ ও PR যথাক্রমে একটি বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস। Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর PS লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে PQ, ∠SPRকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। (বো. প্র., ১৯২৭)

১২। ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিবৃত্তে DC বাহুর সমান করিয়া DP জ্যা অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে PB = BC। (বো. প্র., ১৯২৯)

১৩। O, একটি বৃত্তেব কেন্দ্র, এবং BC, একটি নির্দ্দিষ্ট চাপ। BC চাপেব উপব A যে কোনও একটি বিন্দু। OB এবং OCএব উপব AD ও AE লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কব যে A বিন্দুর সর্ব্বাবস্থানে DEএর দৈর্ঘ্য সমান থাকিবে। (ক. প্র., ১৮৮১)

[সঙ্কেত : DOEA চতুর্ভুজেব পরিবৃত্তেব ব্যাস OA ; এবং ∠EOD সর্ব্বাবস্থায সমান বলিযা DE জ্যার দৈর্ঘ্যও সমান।]

*১৪। ত্রিভুজেব যে কোন কোণেব বহির্দ্বিখণ্ডক ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্ত্তী। (পাট. প্র. ১৯৩৪)

১৫। ABCD চতুর্ভুজেব শীর্ষ দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইযাছে। যদি AB ও DC, P বিন্দুতে, এবং BC ও AD, Q বিন্দুতে মিলিত হয়, প্রমাণ কব যে ∠AQB ও ∠APDএব দ্বিখণ্ডকদ্বয়েব অন্তর্ভুক্ত কোণ এক সমকোণ। (পা. প্র., ১৯৩৪)

১৬। ABC ত্রিভুজেব BC, CA, AB বাহুর উপব যথাক্রমে P, Q, R বিন্দু লওযা হইল; এবং BPR ও CPQ ত্রিভুজদ্বযেব পবিবৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। ঐ বৃত্ত দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ কবিলে প্রমাণ কব যে A, R, O এবং Q একই বৃত্তের উপর থাকিবে। (বো. প্র., ১৯১৯)

*১৭। ABC ত্রিভুজেব A, B, C হইতে বিপবীত বাহুর উপর যথাক্রমে AD, BE, CF লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে ঐ লম্বগুলি △DEFএর কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (বো. প্র., ১৯২০)

১৮। কোন চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। ঐ ছেদবিন্দু হইতে চতুর্ভুজের বাহুগুলির উপর লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে লম্বগুলির পদ এক বৃত্তের উপর থাকিবে। (বো. প্র., ১৯২২)

১৯। একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCDএর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে প্রমাণ কর যে উহাদের ছেদবিন্দু হইতে ঐ চতুর্ভুজের কোন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (বো. প্র., ১৯২৩)

২০। O, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCDএর কেন্দ্র। AD চাপের মধ্যবিন্দু P হইলে এবং AB ও CD হইতে O সমদূরবর্ত্তী হইলে প্রমাণ কর যে POকে বর্দ্ধিত করিলে উহা BC চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

(বো. প্র., ১৯২৮)

২১। একটি বৃত্তের AB, AC দুইটি স্পর্শক। ABC ত্রিভুজের বাহিরে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D লও। প্রমাণ কর যে ∠ABD এবং ∠ACDএর সমষ্টি সর্ব্বাবস্থায় একই থাকিবে। (পা. প্র., ১৮৯২)

*২২। প্রমাণ কর যে এক ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুত্রয় এবং যে কোনও শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের পদ একই বৃত্তের উপর থাকিবে। (ক. প্র., ১৯০৫)

*২৩। একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কতকগুলি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর স্পর্শক অঙ্কিত করা হইল। স্পর্শবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*২৪। কোনও চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের চারি বাহুকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত টানা যাইবে।

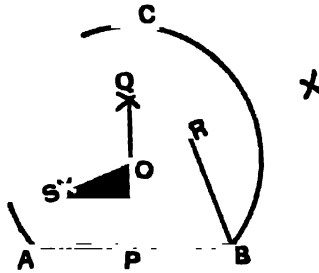
*২৫। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বের পদত্রয় একবৃত্তস্থ হইবে।

বৃত্ত বিষয়ক অঙ্কন

১৩৪। উল্লিখিত বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্যগুলির সাহায্যে বহু জ্যামিতিক অঙ্কন কার্য্য করা যাইতে পারে। নিম্নে এইরূপ কয়েকটি অঙ্কনের বিষয় আলোচিত হইল।

সম্পাদ্য ২৩

একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত বা নির্দ্দিষ্ট চাপের কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the centre of a given circle or of a given arc.]

মনে কর ABC একটি চাপ।
ইহার কেন্দ্র নির্ণয করিতে হইবে।

অঙ্কন। যে কোন দুইটি জ্যা AB ও BC লও; এবং এই জ্যাদ্বয়কে যথাক্রমে PQ ও RS দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কব। (২য় সম্পাদ্য)

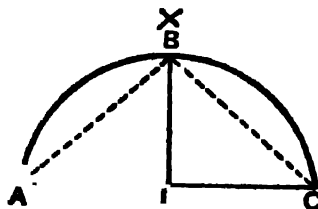
মনে কর PQ এবং RS পরস্পব O বিন্দুতে ছেদ করিল।
তাহা হইলে, O নির্ণেয় কেন্দ্র হইবে।

প্রমাণ। ∵ PQ, ABকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে,
∴ PQএর প্রত্যেক বিন্দু, A ও B হইতে সমদূরবর্ত্তী।
এইরূপ, RSএর উপর প্রত্যেক বিন্দু, B ও C হইতে সমদূরবর্ত্তী।
∴ O বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্ত্তী।
অর্থাৎ O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ২৪

একটি নির্দ্দিষ্ট চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given arc.]

×

মনে কর ABC চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AC সংযুক্ত কর; এবং উহাকে DB সরল রেখা দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর। (সম্পাদ্য ২)

মনে কর DB, ABC চাপকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে ABC চাপ B বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

প্রমাণ। AB, BC সংযুক্ত কর।

∵ BD, ACকে লম্বরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে,

∴ BDএর যে কোন বিন্দু A ও C বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী;

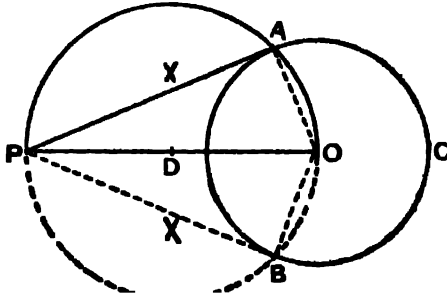
সুতরাং, BA জ্যা = BC জ্যা;

∴ BA চাপ = BC চাপ; (৪০ উপপাদ্য)

অর্থাৎ, ABC চাপ B বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল। ই. স. বি.

সম্পাদ্য ২৫

একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর উহার বহিঃস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a tangent to a circle from a given external point.]

মনে কর ABC একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত, এবং O, উহার কেন্দ্র। P, ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। P হইতে ABC বৃত্তের উপর একটি স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। OP সংযুক্ত কর, এবং উহাকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। Dকে কেন্দ্র করিয়া DP ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। মনে কর এই বৃত্ত, নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত ABCকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল।

PA সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে PA, ABC বৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। OA সংযুক্ত কর।

এখন, ∵ PO, PAO বৃত্তের ব্যাস,

∴ $\angle$PAO = এক সমকোণ, (বৃত্তার্দ্ধস্থ কোণ বলিয়া)

∴ AP সরল রেখা প্রদত্ত বৃত্তের OA ব্যাসার্দ্ধের উপর লম্ব,

∴ PA, ABC বৃত্তকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিল। ই. স. বি.

মন্তব্য ১। PB সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যাইতে পারে যে PBও ABC বৃত্তের একটি স্পর্শক। অতএব, বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে। "

৪৩ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্তে প্রমাণিত হইয়াছে যে এই স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

মন্তব্য ২। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় না।

১৩৫। কোন সরল রেখা দুই বৃত্তের প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করিলে, উহাকে বৃত্তদ্বয়ের একটি **সাধারণ স্পর্শক** (Common tangent) বলে।

যদি দুইটি বৃত্তের কোন সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি, কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক সরল রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত থাকে, তাহা হইলে উহাকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct common tangent) বলে; এবং উক্ত স্পর্শবিন্দুদ্বয় কেন্দ্র-সংযোজক সরল রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকিলে ঐ স্পর্শককে **তির্য্যক সাধারণ স্পর্শক** (Transverse common tangent) বলে।

সম্পাদ্য ২৬

দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের এক সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a direct common tangent to two given circles.]

মনে কর A, বৃহত্তর বৃত্তের ও B, ক্ষুদ্রতর বৃত্তের কেন্দ্র ; এবং a, b যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্দ্ধ।

এই দুই বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সংযুক্ত কর। Aকে কেন্দ্র করিয়া ও উভয় বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অন্তরফল ($a-b$) এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর ; এবং B হইতে এই বৃত্তের উপর BC স্পর্শক অঙ্কিত কর। (২৫ সম্পাদ্য)

AC সংযুক্ত কর এবং ইহাকে এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন ইহা বৃহত্তর বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ADএর সমান্তরাল করিয়া এরূপ এক ব্যাসার্দ্ধ BE অঙ্কিত কর যেন AD ও BE, AB সরল রেখার একই পার্শ্বে থাকে।

DE সংযুক্ত কর। তাহা হইলে, DE উভয় বৃত্তের এক সরল সাধারণ স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। AD = a, এবং AC = $a-b$;

∴ CD = b = BE।

তাহা হইলে, CD ও BE পরস্পর সমান ও সমান্তরাল ;

∴ CBED একটি সামান্তরিক।

কিন্তু, BC, C বিন্দুতে স্পর্শক হওয়ায় ∠DCB = এক সমকোণ ;

∴ DCBE একটি আয়তক্ষেত্র ;

সুতরাং, ∠ADE ও ∠BED কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে এক সমকোণ ;

∴ DE বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে স্পর্শ করিল ;

অর্থাৎ, DE উভয় বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক।

ই. স. বি.

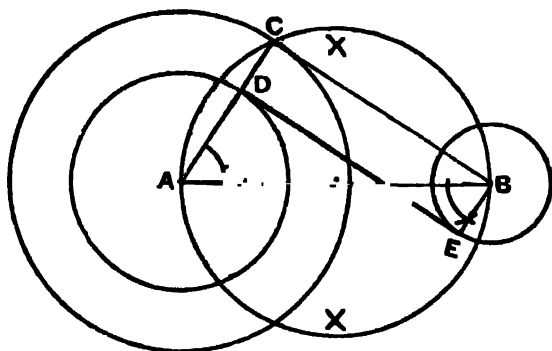
মন্তব্য। AB সরল রেখার অপর পার্শ্বে DEএর অনুরূপ আরও একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

অতএব, দেখা যাইতেছে যে দুই বৃত্তের **দুইটি** সরল সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত। দুই বৃত্তের উপর অঙ্কিত সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

সম্পাদ্য ২৬ (ক)

দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের এক তির্য্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw a transverse common tangent to two given circles.]

মনে কর A, বৃহত্তর বৃত্তের এবং B, ক্ষুদ্রতর বৃত্তের কেন্দ্র ; এবং a, b যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্দ্ধ। এই বৃত্তদ্বয়ের একটি তির্য্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সংযুক্ত কর। Aকে কেন্দ্র করিয়া দুই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমষ্টি $(a+b)$ এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর ; এবং B হইতে এই বৃত্তের উপর BC স্পর্শক অঙ্কিত কর।

AC সংযুক্ত কর ; ইহা যেন প্রথম বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

D বিন্দু AB সরল রেখার যে পার্শ্বে অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে DAএর সমান্তরাল করিয়া BE ব্যাসার্দ্ধ অঙ্কিত কর। DE সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, DE উভয় বৃত্তের এক তির্য্যক সাধারণ স্পর্শক হইবে।

প্রমাণ। $\because$ $AD = a$, এবং $AC = a + b$

$\therefore$ $DC = b = BE$।

প্রমাণের অবশিষ্ট অংশ ২৬ সম্পাদ্যের প্রমাণের অনুরূপ। ই. স. বি.

মন্তব্য। ইহা সহজে বুঝা যাইতেছে যে এস্থলে আরও একটি তির্য্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত। দুই বৃত্তের উপর অঙ্কিত তির্য্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান ও উহারা কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার উপর পরস্পর ছেদ করে।

অনুশীলনী ৫০

১। (ক) 2″ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং কেন্দ্র হইতে 4″ দূরের কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের অপর দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত কর।

(খ) স্পর্শবিন্দুদ্বয়-সংযোজক জ্যার দৈর্ঘ্য মাপিয়া বাহির কর।

(ক. প্র., ১৯১৩)

*২। দুই বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের কতগুলি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় এবং যখন বৃত্তগুলি পরস্পর ছেদ করে না তখনই বা কতগুলি ?

কখন্ কোনও সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা অসম্ভব ?

(ক. প্র., ১৯৩১, ঐচ্ছিক)

*৩। নিম্নলিখিত প্রত্যেকস্থলে কতগুলি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা যাইবে ?

(ক) দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে পরস্পর স্পর্শ করিলে ;

(খ) দুইটি বৃত্ত অন্তঃস্থভাবে পরস্পর স্পর্শ করিলে ;

*৪। প্রমাণ কর যে দুই বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

*৫। প্রমাণ কর যে দুই বৃত্তের তির্য্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

*৬। দুই বৃত্তের সরল সাধারণ স্পর্শকদ্বয় অথবা তির্য্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয় কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার উপর ছেদ করিবে।

৭। দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থ ভাবে পরস্পর A বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে; এবং PT, উহাদের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। প্রমাণ কর যে PTকে ব্যাস লইয়া উহার উপর অঙ্কিত বৃত্ত, কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

৮। যদি একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যায়, তবে উহাদের ছেদবিন্দুদ্বয়ে শেষোক্ত বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক পূর্ব্বোক্ত বৃত্তের উপর মিলিত হইবে।

৯। দুইটি বৃত্ত এরূপে অবস্থিত যে একটি অপরটির সম্পূর্ণ বাহিরে। O এবং P, উহাদের কেন্দ্র; এবং উহাদের দুইটি তির্য্যকসাধারণ স্পর্শক A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে OA, স্পর্শকদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন কোণের দ্বিখণ্ডক; এবং OA ও PA একই সরল রেখায় অবস্থিত।

বৃত্ত অঙ্কন সম্বন্ধে কয়েকটি মন্তব্য

১৩৬। কোন বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইলে উহার কেন্দ্র ও ব্যাসার্দ্ধ জানা থাকা আবশ্যক।

যদি কেন্দ্রের দুইটি সঞ্চারপথ নির্দ্দিষ্ট থাকে, তবে তাহাদের ছেদবিন্দু হইতে কেন্দ্রের অবস্থান জানা যায়; এখন, বৃত্তের কোন একটি বিন্দুও দেওয়া থাকিলে কেন্দ্র হইতে এই প্রদত্ত বিন্দুটির দূরত্বই ব্যাসার্দ্ধ হইবে; সুতরাং, কেন্দ্রের দুইটি সঞ্চারপথ ও বৃত্তের একটি বিন্দু, এই তিনটি দেওয়া থাকিলে ঐ বৃত্তটি সম্পূর্ণভাবে অঙ্কিত করা যাইবে। এইরূপ, যে কোন তিনটি স্বতন্ত্র উপাত্ত (*data*) হইতে একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

যথা, বৃত্তের তিন বিন্দু, দুই বিন্দু ও ব্যাসার্দ্ধ, ইত্যাদি দেওয়া থাকিলে উহা অঙ্কিত করা যায়।

বৃত্তের নিম্নলিখিত বিশেষত্বগুলি মনে রাখিলে বৃত্তাঙ্কন সহজ হইবে :

(ক) যে-কোন ব্যাস বৃত্তের একটি প্রতিসাম্য-অক্ষ। সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্রগামী কোন সরল রেখা ও এক বিন্দুর অবস্থান দেওয়া থাকিলে, ঐ বৃত্তের দ্বিতীয় একটি বিন্দুর অবস্থানও জানা যায় (৩০ উপপাদ্যের মন্তব্য দেখ)।

(খ) দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র উক্ত বিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বের উপর থাকিবে।

(গ) যে সকল বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রগুলি উক্ত বিন্দু হইতে অঙ্কিত ঐ সরল রেখার লম্বের উপর থাকিবে।

(ঘ) যে সকল বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রগুলি ঐ বৃত্তের উক্ত নির্দ্দিষ্ট বিন্দুগামী ব্যাসার্দ্ধ কিংবা ঐ ব্যাসার্দ্ধের বর্দ্ধিত অংশের উপর থাকিবে।

(ঙ) যে সকল বৃত্ত কোন নির্দ্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট এবং যাহারা একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্র উক্ত সরল রেখা হইতে নির্দ্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধ পরিমাণ দূরে অবস্থিত দুইটি সমান্তরাল সরল রেখার উপর থাকিবে।

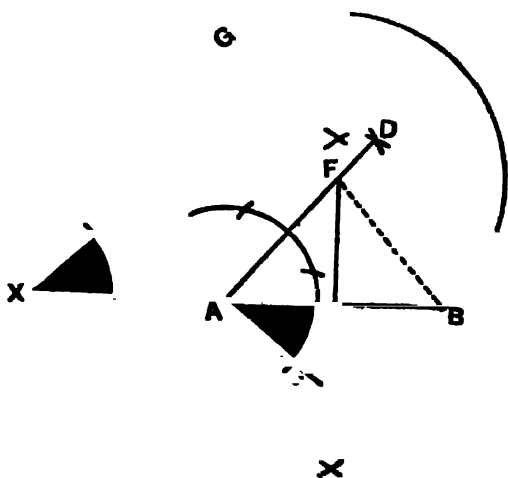
(চ) যে সকল বৃত্ত নির্দ্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট এবং যাহারা অপর একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রগুলি এমন একটি বৃত্তের উপর থাকিবে, যাহা উক্ত নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের এককেন্দ্রীয় এবং যাহার ব্যাসার্দ্ধ প্রথমোক্ত ব্যাসার্দ্ধ ও নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমষ্টি বা অন্তরের সমান।

(ছ) যে সকল বৃত্ত দুইটি নির্দ্দিষ্ট ছেদকারী সরল রেখাকে স্পর্শ করে, উহাদের কেন্দ্রগুলি উক্ত সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে।

এই উপপাদ্যগুলি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

সম্পাদ্য ২৭

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর এমন এক বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার অন্তর্গত কোণ একটি নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

[On a given straight line to describe a segment of a circle which shall contain an angle equal to a given angle.]

মনে কর AB, নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; ও ∠X, এক নির্দ্দিষ্ট কোণ। AB সরল রেখার উপর এমন একটি বৃত্তাংশ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার অন্তর্গত কোণ, ∠Xএর সমান হইবে।

অঙ্কন। AB সরল রেখার A বিন্দুতে X কোণের সমান করিয়া ∠BAC অঙ্কিত কর। A বিন্দু হইতে ACএর উপর AD লম্ব অঙ্কিত কর। AB সরল রেখাকে EF সরল রেখা দ্বারা লম্বরূপে সমদ্বিখণ্ডিত কর; EF যেন ADকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, Fকে কেন্দ্র করিয়া AF ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। তাহা হইলে, ∠BACএর একান্তর বৃত্তাংশ AGBই নির্ণেয় বৃত্তাংশ হইবে।

প্রমাণ। BF সংযুক্ত কর।

EF সরল রেখার যে কোন বিন্দু A ও B বিন্দু হইতে সমদূরবর্ত্তী ;

∴ FA = FB।

∴ Fকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি B বিন্দু দিয়াও যাইবে।

আবার, ∵ AC, AF ব্যাসার্দ্ধের উপর লম্ব ;

∴ AC সরল রেখা A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হইল।

অতএব, একান্তর AGB বৃত্তাংশস্থ কোণ, ∠BAC অর্থাৎ ∠Xএর সমান। (উপপাদ্য ৪৫)

∴ AGB নির্ণেয় বৃত্তাংশ। ই. স. বি.

অনুশীলনী ৫১

১। ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও উন্নতি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। (অঙ্কন ও প্রমাণ আবশ্যক) (ক. প্র., ১৯২১)

*২। এক ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে। প্রমাণ কর যে উহার পরিবৃত্ত একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

*৩। এক ত্রিভুজের ভূমি, উন্নতি ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

*৪। এক ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে ; উহার শীর্ষ একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর থাকিলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। এক নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দ্দিষ্ট শিরঃকোণবিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

এক নির্দ্দিষ্ট ভূমিব উপব নির্দ্দিষ্ট শিরঃকোণ বিশিষ্ট এমন অঙ্কিত কব যাহাব

৬। এক বাহু দেওয়া আছে ;

৭। ভূমির উপর মধ্যমার দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে :

৮। শীর্ষ হইতে ভূমির উপব লম্বেব পদ দেওয়া আছে ;

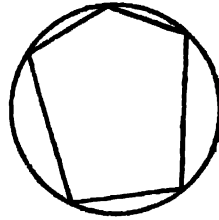
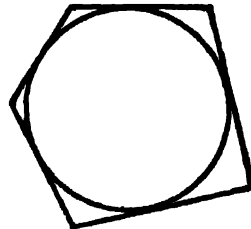
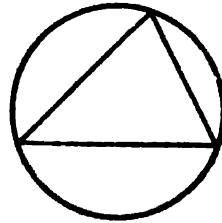
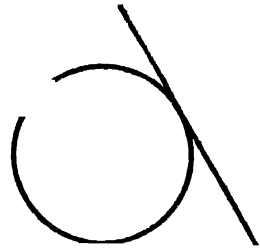
৯। শিবঃকোণেব দ্বিখণ্ডকের সহিত ভূমিব ছেদবিন্দু দেওয়া আছে।

[সঙ্কেত : শিবঃকোণেব দ্বিখণ্ডক ভূমিব মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বের সহিত ত্রিভুজেব পরিবৃত্তের উপব মিলিত হয়।]

১০। ভূমিব এক প্রান্ত হইতে বিপবীত বাহুর দূরত্ব দেওয়া আছে ;

১১। শীর্ষ, দুইটি নির্দ্দিষ্ট সবল বেখা হইতে সমদূরবর্ত্তী ;

১২। শীর্ষে, অপব একটি নির্দ্দিষ্ট সবল রেখা একটি নির্দ্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে।

১৩৭। যদি কোন ঋজুবেখ ক্ষেত্রেব শীর্ষগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত থাকে, তাহা হইলে উক্ত 'ঋজুবেখ ক্ষেত্র বৃত্তেব **অন্তর্লিখিত** (inscribed) হইল' বলা হয, এবং 'বৃত্ত উক্ত ঋজুবেখ ক্ষেত্রের **পরিলিখিত** (circumscribed) হইল', এইরূপ বলা হয়।

১৩৮। যদি কোন ঋজুবেখ ক্ষেত্রেব প্রত্যেক বাহু একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে ঐ 'বৃত্ত ঋজুবেখ ক্ষেত্রেব **অন্তর্লিখিত** হইল' বলা হয এবং 'ঐ ঋজুরেখ ক্ষেত্র উক্ত বৃত্তের **পরিলিখিত** হইল' বলা হয়।

১৩৯। কোন ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তকে উহার **পরিবৃত্ত** বলে, এবং ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** বলা হয়।

১৪০। যে বৃত্ত কোন ত্রিভুজেব তিন বাহুকে স্পর্শ করে উহাকে ঐ ত্রিভুজেব **অন্তর্বৃত্ত** (In-circle) বলা হয়; এবং ঐ বৃত্তেব কেন্দ্রকে **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) বলে।

১৪১। যে বৃত্ত কোন ত্রিভুজের এক বাহুকে এবং অন্য দুইটি বাহুর বর্দ্ধিত অংশকে স্পর্শ করে, তাহাকে ঐ ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (Ex-circle) বলে; এবং ঐ বৃত্তেব কেন্দ্রকে **বহিঃকেন্দ্র** (Ex-centre) বলা হয়।

অতএব, প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত থাকিবে।

সম্পাদ্য ২৮

এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw the circum-circle of a given triangle.]

মনে কর ABC একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ; এবং ইহার পরিবৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। LS ও MS দ্বারা যথাক্রমে AB ও BC বাহুদ্বয়কে লম্ব-ভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর উহারা S বিন্দুতে ছেদ করিল।

Sকে কেন্দ্র করিয়া SA ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। তাহা হইলে এই বৃত্ত A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে।

প্রমাণ। ∵ LS, ABকে লম্বরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে;

∴ S, A ও B হইতে সমদূরবর্ত্তী।

এইরূপ S, B ও C হইতেও সমদূরবর্ত্তী।

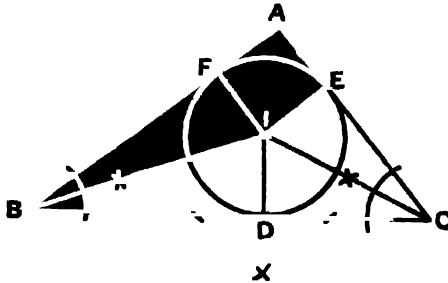
∴ S বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্ত্তী।

অতএব, অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে। ই. স. বি.

মন্তব্য। অঙ্কনের সাহায্যে দেখা যাইবে যে সূক্ষ্মকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র যথাক্রমে ত্রিভুজের ভিতরে ও বাহিরে থাকিবে; সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু হইবে।

সম্পাদ্য ২৯

কোন ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To draw the in-circle of a given triangle.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে.

অঙ্কন। ∠ABC ও ∠ACBকে যথাক্রমে BI ও CI দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং মনে কর উহারা I বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হইল; I বিন্দু হইতে BC বাহুর উপর ID লম্ব টান, Iকে কেন্দ্র করিয়া ও IDএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত কর।

এই অঙ্কিত বৃত্ত ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। I বিন্দু হইতে AC ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে IE ও IF লম্ব টান।

∵ IB, ∠ABCএর দ্বিখণ্ডক,

∴ IBএর প্রত্যেক বিন্দু AB ও BC বাহু হইতে সমদূরবর্ত্তী;

∴ IF = ID. এইরূপ, ID = IE;

∴ IF = ID = IE;

∴ Iকে কেন্দ্র করিয়া ও ID ব্যাসার্দ্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত E ও F বিন্দু দিয়া যাইবে।

এখন, ∵ ID, IE ও IF ব্যাসার্দ্ধের যথাক্রমে D, E ও F বিন্দু-

সংলগ্ন কোণগুলি প্রত্যেকে এক সমকোণ,

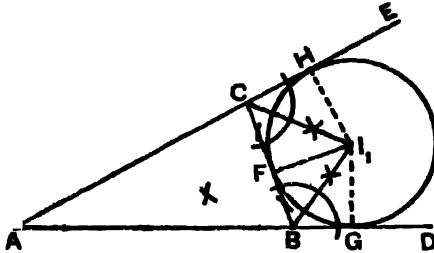
∴ বৃত্তটি BC, CA ও AB বাহুগুলিকে স্পর্শ করিবে।

∴ বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত হইবে। ই. স. বি.

মন্তব্য। I, ABC ত্রিভুজেব অন্তঃকেন্দ্র।

সম্পাদ্য ৩০

কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের এক বহির্বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে

[To draw an excircle of a given triangle.]

ABC একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা BC বাহুকে এবং বর্দ্ধিত AB ও AC বাহুকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন। AB এবং ACকে যথাক্রমে D এবং E পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। এখন, ∠CBD ও ∠BCEকে যথাক্রমে BI_1 ও CI_1 দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর; উহাবা যেন I_1 বিন্দুতে পরস্পব মিলিত হইল। BCএব উপর I_1F লম্ব অঙ্কিত কব।

I_1কে কেন্দ্র করিয়া I_1F ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই অঙ্কিত বৃত্ত ত্রিভুজের একটি নির্ণেয় বহির্বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। I_1 বিন্দু হইতে BD ও CE বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে I_1G ও I_1H লম্ব দুইটি অঙ্কিত কর।

$\because$ BI_1, CBD কোণের দ্বিখণ্ডক, $\therefore$ BI_1এর যে-কোন বিন্দু BC ও BD হইতে সমদূরবর্ত্তী,

$$\therefore \quad I_1F = I_1G ;$$

এইরূপ, $I_1F = I_1H$;

$$\therefore \quad I_1F = I_1G = I_1H ,$$

$\therefore$ I_1কে কেন্দ্র করিয়া ও I_1F ব্যাসার্দ্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত G ও H বিন্দু দিয়া যাইবে।

এখন, $\because$ F, G ও H-বিন্দুসংলগ্ন কোণগুলি প্রত্যেকে এক সমকোণ ;

$\therefore$ বৃত্তটি BC, BD ও CE বাহুগুলিকে স্পর্শ করিবে।

অর্থাৎ, বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত। ই. স. বি.

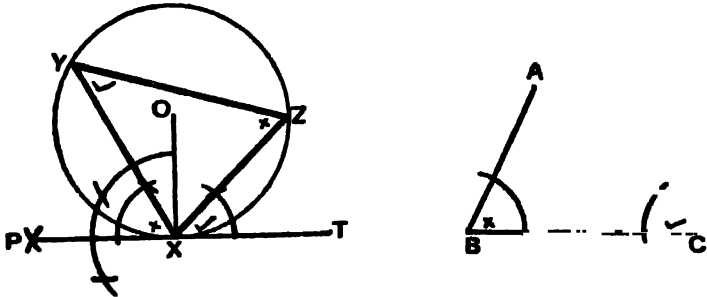
মন্তব্য। স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে কোন ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

উপরের চিত্রে AI_1 সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যায় যে AI_1, $\angle$BACকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অতএব, যে কোন ত্রিভুজের দুইটি বহিঃকোণের দ্বিখণ্ডক ও তৃতীয় কোণের দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু ; এবং উহাদের সম্পাতবিন্দু ত্রিভুজের একটি বহিঃকেন্দ্র হইবে।

সম্পাদ্য ৩১

একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তে কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

[In a given circle to inscribe a triangle equiangular to a given triangle.]

XYZ এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত, ও ABC এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

XYZ বৃত্তে ABC ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিযা একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কবিতে হইবে।

অঙ্কন। বৃত্তটিব X বিন্দুতে PXT স্পর্শক অঙ্কিত কর।

PT সরল রেখাব X বিন্দুতে ∠Bএব সমান কবিযা ∠PXY, এবং ∠Cএব সমান কবিয়া ∠TXZ অঙ্কিত কর। XY ও XZ যেন বৃত্তটিকে যথাক্রমে Y ও Z বিন্দুতে ছেদ কবিল। YZ সংযুক্ত কব। তাহা হইলে, △XYZ নির্ণেয ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। ∠PXY = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠XZY।

কিন্তু, ∠PXY = ∠B ;

∴ ∠XZY = ∠B।

এইরূপে প্রমাণ কবা যায যে ∠XYZ = ∠C।

∴ △XYZ এব তৃতীয ∠ZXY = △ABCএর তৃতীয ∠A ;

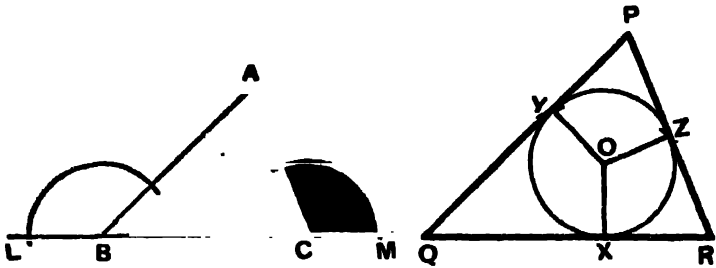
সুতরাং, XYZ ও ABC ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণ।

কিন্তু, △XYZ প্রদত্ত বৃত্তের অন্তর্লিখিত হইয়াছে।

△XYZই নির্ণেয় ত্রিভুজ। ই. স. বি

সম্পাদ্য ৩২

এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[About a given circle to circumscribe a triangle equiangular to a given triangle.]

মনে কর ABC একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ, XYZ, একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত; এবং O, উহার কেন্দ্র।

ABC ত্রিভুজেব সহিত সদৃশকোণ করিয়া XYZ বৃত্তেব পবিলিখিত এক ত্রিভুজ অঙ্কিত কবিতে হইবে।

অঙ্কন। BC বাহুকে উভযদিকে L ও M পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

বৃত্তটিব যে কোন এক ব্যাসার্দ্ধ OX লও।

O বিন্দুতে ∠ABLএব সমান করিযা ∠XOY, এবং ∠ACMএর সমান কবিযা ∠XOZ অঙ্কিত কব।

মনে কর OY ও OZ, বৃত্তেব পরিধির সহিত যথাক্রমে Y ও Z বিন্দুতে মিলিত হইল।

X, Y ও Z বিন্দু দিযা বৃত্তের তিনটি স্পর্শক অঙ্কিত কর, উহারা যেন পবস্পব P, Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ΔPQRই নির্ণেয ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। QXOY চতুর্ভুজের ∠X+∠Y=দুই সমকোণ,

(∵ প্রত্যেকে সমকোণ)

∴ $\angle Q$, $\angle XOY$ অর্থাৎ $\angle ABL$এর সম্পূরক ,

কিন্তু, $\angle ABC$, $\angle ABL$এর সম্পূরক ,

$\angle Q = \angle ABC$ ।

এইরূপ, $\angle R = \angle ACB$ ।

∴ $\angle BAC = \angle P$ ।

সুতরাং, PQR ও ABC ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সদৃশকোণ ।

কিন্তু, $\triangle PQR$ প্রদত্ত বৃত্তে পরিলিখিত হইয়াছে ;

∴ $\triangle PQR$ই নির্ণেয় ত্রিভুজ । ই. স. বি.

অনুশীলনী ৫২

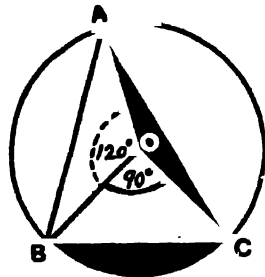
১। কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর পরিমাণ 5, 6 ও 7 সেন্টিমিটর। উহার অন্তর্বৃত্ত ও তিনটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত কর।

২। এক সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর পরিমাণ 2"। উহার অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত কর, এবং বৃত্তটির ব্যাসার্দ্ধ মাপিয়া বাহির কর।

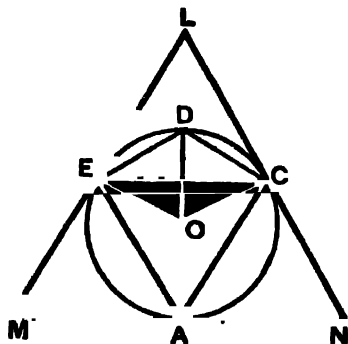
*৩। ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র Tকে কেন্দ্র করিয়া ও যে কোন ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ঐ বৃত্ত ত্রিভুজের বাহুগুলি হইতে সমান সমান জ্যা ছেদ করিবে।

৪। ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত BC বাহুকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিল। প্রমাণ কর যে $AB \sim AC = BP \sim CP$ ।

*৫। এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অভ্যন্তরে এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার দুই কোণ $60°$ ও $45°$ হইবে।

[সঙ্কেত : যদি $\angle C = 60°$ হয়, তবে কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$, $\angle C$এর দ্বিগুণ অর্থাৎ $120°$ হইবে, ইত্যাদি।]

*৬। কোন বৃত্তেব অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কব।

[সঙ্কেত : মনে কর O বৃত্তের কেন্দ্র। যে কোন ব্যাস AD অঙ্কিত কর। Dকে কেন্দ্র করিয়া এবং DOএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া অঙ্কিত চাপ বৃত্তকে যেন C ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। AC, CE, AE সংযুক্ত কর। তাহা হইলে, ΔACE অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজ।

এখন, A, C ও E বিন্দুতে বৃত্তেব স্পর্শক অঙ্কিত কব, উহারা পরস্পব যেন L, M ও N বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কব যে LMN পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজ।]

৭। প্রমাণ কব যে ৬ষ্ঠ প্রশ্নে অন্তর্লিখিত ত্রিভুজেব ক্ষেত্রফল পরিলিখিত ত্রিভুজের এক-চতুর্থাংশ হইবে।

৮। ৬ষ্ঠ প্রশ্নে বৃত্তটিব ব্যাসার্দ্ধ 4″ হইলে, উহাব অন্তর্লিখিত ও পবিলিখিত ত্রিভুজেব ক্ষেত্রফল নির্ণয কব।

৯। 2 সেণ্টিমিটব ব্যাসার্দ্ধবিশিষ্ট কোন বৃত্তের পবিলিখিত এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত কব যেন ঐ ত্রিভুজের দুই কোণ যথাক্রমে 45° ও 60° হয।

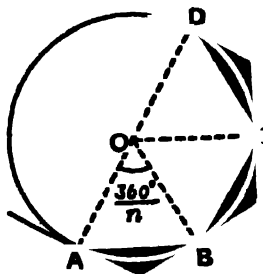
*১০। একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত কব যাহার বাহুত্রয তিনটি নির্দ্দিষ্ট সরল বেখাব উপব লম্ব হইবে।

*১১। এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তেব পবিলিখিত এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত কব যেন উহার বাহুত্রয তিনটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল হয়।

১২। কোন ত্রিভুজের তিন কোণ ও উহার অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

সম্পাদ্য ৩৩

কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের (ক) অন্তর্লিখিত; (খ) পরিলিখিত এক সুষম বহুভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[In and about a given circle to describe a regular polygon.]

মনে কর ABC একটি বৃত্ত; এবং O, উহার কেন্দ্র।

(ক) এই বৃত্তের অন্তর্লিখিত n বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

এবং (খ) উক্ত বৃত্তের পরিলিখিত n বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। (ক) O বিন্দুতে $\frac{360°}{n}$ এর সমান করিয়া $\angle$AOB অঙ্কিত কর। কোণের বাহুদ্বয় যেন ঐ বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল।

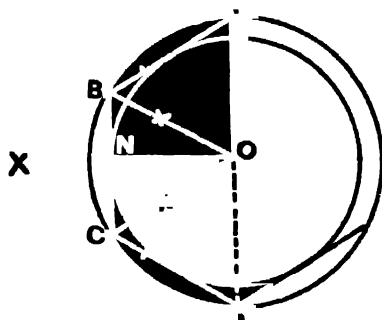
তাহা হইলে AB, বহুভুজের এক বাহু হইবে।

এখন AB জ্যার সমান করিয়া পর পর BC, CD···জ্যা অঙ্কিত কর। এইরূপে উৎপন্ন ক্ষেত্র নির্ণেয় সুষম বহুভুজ হইবে।

(খ) বৃত্তের পরিলিখিত n বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অঙ্কিত করিতে হইলে, পূর্ব্বের নিয়মে, A, B, C, D,···বিন্দুগুলি প্রথমে নির্ণয় কর এবং ঐ সকল বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত কর। প্রমাণ কর যে এই স্পর্শকগুলি দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্র নির্ণেয় সুষম বহুভুজ হইবে।

সম্পাদ্য ৩৪

এক নির্দ্দিষ্ট সুষম বহুভুজের (ক) অন্তর্লিখিত; (খ) পরিলিখিত এক বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

[In and about a regular polygon to describe a circle.]

মনে কর ABCD···একটি n-বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ; এবং AB, BC, CD··· ইহার বাহু।

এই সুষম বহুভুজের (ক) অন্তর্লিখিত; এবং (খ) পরিলিখিত এক বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABC ও BCD কোণদ্বয়কে BO এবং CO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর; BO এবং CO যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে O বিন্দু নির্ণেয় উভয় বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

(ক) O হইতে BCএর উপর ON লম্ব টান। Oকে কেন্দ্র করিয়া ONকে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এক বৃত্ত অঙ্কিত কর; এই বৃত্তই নির্ণেয় অন্তর্লিখিত বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। (ক) OD সংযুক্ত কব।

OCB এবং OCD ত্রিভুজদ্বযেব

BC = CD (কল্পনা)

OC = OC

এবং $\angle OCB = \angle OCD$ (অঙ্কন)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম।

∴ $\angle ODC = \angle OBC = \frac{1}{2}\angle B$।

কিন্তু, সুষম বহুভুজেব কোণগুলি পবস্পব সমান,

∴ $\angle B = \angle D$;

∴ $\angle ODC = \frac{1}{2}\angle D$;

অর্থাৎ, OD, $\angle D$এব দ্বিখণ্ডক।

এইরূপে প্রমাণিত হইবে যে বহুভুজেব কোণগুলির যাবতীয় দ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হইবে। অতএব, O বিন্দু AB, BC CD···বাহু হইতে সমদূববর্ত্তী।

∴ Oকে কেন্দ্র কবিয়া এবং ONকে ব্যাসার্দ্ধ লইযা বৃত্ত অঙ্কিত কবিলে উহা O হইতে AB, BC, CD ··বাহুব উপব পাতিত লম্বগুলিব পদ দিযা যাইবে। অতএব উহা AB, BC · ···বাহুকে স্পর্শ কবিবে।

অর্থাৎ, এই বৃত্তই নির্ণেয় অন্তর্লিখিত বৃত্ত।

(খ) উল্লিখিতভাবে ত্রিভুজগুলিব সর্ব্বসমতা হইতে প্রমাণিত হইবে যে

$$OA = OB = OC = OD = \cdots\cdots$$

অতএব Oকে কেন্দ্র করিয়া OAকে ব্যাসার্দ্ধ লইযা একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ঐ বৃত্ত A, B, C, D,···বিন্দু দিযা যাইবে।

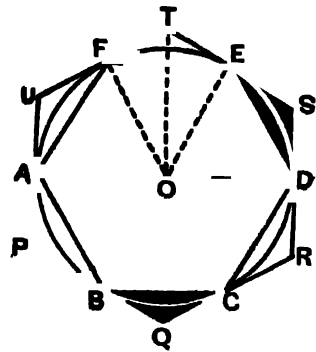
∴ এই বৃত্তই নির্ণেয পরিলিখিত বৃত্ত।

অনুশীলনী ৫৩

*১। একটি বৃত্তের (ক) অন্তর্লিখিত ; (খ) পরিলিখিত এক সুষম ষড়্‌ভুজ অঙ্কিত কর।

[মনে কর ACE একটি বৃত্ত ; এবং O, উহার কেন্দ্র।

ACE বৃত্তের (ক) অন্তর্লিখিত ; এবং (খ) পরিলিখিত এক সুষম ষড়্‌ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। (ক) বৃত্তের এক ব্যাস AD অঙ্কিত কর ; এবং D ও A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং DO ব্যাসার্দ্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর ; উহারা যেন পরিধিকে যথাক্রমে C, E এবং B, F বিন্দুতে ছেদ করিল। AB, BC, CD, DE, EF ও FA সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCDEF নির্ণেয় অন্তর্লিখিত ষড়্‌ভুজ।

(খ) A, B, C, D, E, F বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত কর ; উহারা যেন P, Q, R, S, T, U বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে, PQRSTU নির্ণেয় পরিলিখিত ষড়্‌ভুজ।]

*২। কোন সুষম ষড়্‌ভুজের অন্তর্লিখিত একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। (অঙ্কন কার্য্য আবশ্যক)

প্রমাণ কর যে সুষম ষড়্‌ভুজের একান্তর শীর্ষগুলি সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল ষড়্‌ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক।

(ক. প্র., ১৯২৯ ঐচ্ছিক ; ১৯৩২ ঐচ্ছিক)

*৩। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

*৪। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। প্রমাণ কর যে এই বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হইবে।

*৫। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত একটি রম্বস অঙ্কিত কর।

*৬। কোন নির্দ্দিষ্ট রম্বসের অন্তর্লিখিত একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

*৭। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সুষম অষ্টভূজ অঙ্কিত কর।

৮। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত একটি সুষম অষ্টভূজ অঙ্কিত কর।

*৯। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত এরূপ একটি রম্বস অঙ্কিত কর যাহার দুইটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

*১০। কোন অর্দ্ধবৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

*১১। কোন বৃত্তকলার অন্তর্লিখিত একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত : চাপের মধ্যবিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কিত করিয়া উহাকে প্রান্তবর্ত্তী ব্যাসার্দ্ধদ্বয় পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর। এখন, ৪৩ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত দ্বারা অঙ্কন সম্পন্ন কর।]

*১২। 'যে বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ r, উহার ক্ষেত্রফল πr^2 ; ($\pi = \frac{22}{7}$ প্রায়)', এই সূত্রের সাহায্যে দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত : যদি r_1, r_2 এবং r যথাক্রমে নির্দ্দিষ্ট বৃত্তদ্বয় ও নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ হয়, তাহা হইলে $\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi r^2$;

$$\therefore \; r^2 = r_1^2 + r_2^2 \text{ ।}$$

এখন, ২৮ উপপাদ্যের সাহায্যে r নির্ণয় করা যায়।]

*১৩। দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তরের সমান একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

*১৪। কোন বর্গক্ষেত্রের অন্তর্লিখিত এমন একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার একটি শীর্ষ (ক) বর্গক্ষেত্রের কোন শীর্ষে থাকিবে; (খ) বর্গক্ষেত্রের কোন বাহুর মধ্যবিন্দুতে থাকিবে।

*১৫। নির্দ্দিষ্ট কেন্দ্রযুক্ত একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে।

*১৬। নির্দ্দিষ্ট কেন্দ্রযুক্ত একটি বৃত্ত অঙ্কিত কব যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ কবিবে।

*১৭। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কব যাহা কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ কবিবে এবং যাহার কেন্দ্র একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর থাকিবে।

*১৮। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কব যাহা কোন নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক শীর্ষ দিয়া যাইবে এবং দুই বাহুকে স্পর্শ করিবে।

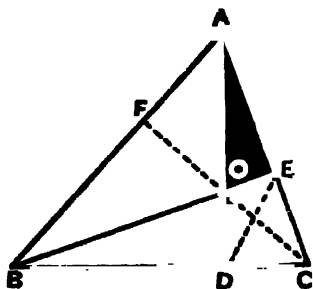
বৃত্ত ও ত্রিভুজ বিষয়ক বিবিধ উপপাদ্য

১৪২। কোন ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

[Perpendiculars from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.]

মনে কর ABC ত্রিভুজেব A ও B বিন্দু হইতে BC ও CA বাহুব উপব যথাক্রমে AD ও BE লম্ব অঙ্কিত কবা হইল, উহাবা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। CO সংযুক্ত কব। মনে কব CO ABএর সহিত F বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে CF ABএর উপর লম্ব।

DE সংযুক্ত কব।

প্রমাণ। ∵ ∠ADB, ∠AEB প্রত্যেকে সমকোণ ;

∴ AEDB একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ;

∴ বহিঃস্থ ∠DEC = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠ABD।

আবার, ∵ ∠ODC + ∠OEC = দুই সমকোণ

(∵ প্রত্যেকে সমকোণ)

∴ ODCE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠DOC = ∠DEC।

অতএব, ∠DOC = ∠ABD ;

∴ BDOF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, (উপ. ৩৬ক, অনু.)

অতএব, ∠ODB + ∠OFB = দুই সমকোণ ;

কিন্তু, ∠ODB = এক সমকোণ ; (কল্পনা)

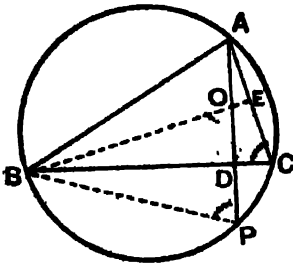
∴ ∠OFB = এক সমকোণ,

অর্থাৎ CF, ABএর উপর লম্ব। ই. উ. বি.

দ্রষ্টব্য। এই উপপাদ্য ১৬৬ পৃষ্ঠায় ১০৪ অনুচ্ছেদে অন্য প্রকারেও প্রমাণিত হইয়াছে।

১৪৩। কোন ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় যে বিন্দুতে মিলিত হয় উহাকে ঐ ত্রিভুজের **লম্ববিন্দু** (Orthocentre) বলে।

১৪২ অনুচ্ছেদের চিত্রে O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু।

১৪৪। O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। AO যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করিলে যদি উহা BC ও পরিবৃত্তকে যথাক্রমে D ও P বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে OD = DP।

BP ও BO সংযুক্ত কর; BOকে এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন উহা ACএর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রমাণ। ∵ AD ও BE যথাক্রমে BC ও CAএর উপর লম্ব,

∴ ODCE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ বহিঃস্থ ∠BOD = অন্তঃস্থ বিপরীত ∠ECD অর্থাৎ ∠ACB।

কিন্তু, ∠ACB = ∠APB ; (∵ একই বৃত্তাংশে অবস্থিত)

∴ ∠BOD = ∠BPD।

এখন, BDO ও BDP ত্রিভুজদ্বয়ের

∠BDO = ∠BDP, (∵ প্রত্যেকে সমকোণ)

∠BOD = ∠BPD, (প্রমাণিত)

BD বাহু = BD বাহু

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম।

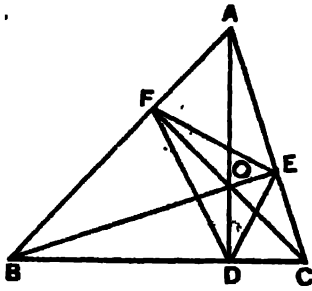
∴ OD = DP। ই. উ. বি.

১৪৫। কোন ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পদগুলি সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাকে **পাদত্রিভুজ** (Pedal or Orthocentric triangle) বলে।

পাদত্রিভুজ

১৪৬। কোন সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপব লম্ব পাদত্রিভুজের শিরঃকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[In an acute-angled traingle the perpendiculars from the vertices to the opposite sides bisect the angles of the pedal triangle through which they pass.]

মনে কব ABC ত্রিভুজেব A, B ও C শীর্ষ হইতে বিপবীত বাহুর উপব AD, BE ও CF লম্বত্রয় অঙ্কিত কবা হইল, এবং উহারা লম্ববিন্দু Oতে পরস্পব ছেদ করিল।

$\therefore$ $\triangle$DEF, ABC ত্রিভুজেব পাদত্রিভুজ।

প্রমাণ কবিতে হইবে যে AD, BE ও CF যথাক্রমে $\angle$FDE, $\angle$DEF ও $\angle$EFDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। AEDB একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, ($\because$ $\angle ADB = \angle AEB$)

$\therefore$ বহিঃস্থ $\angle$EDC = অন্তঃস্থ বিপবীত $\angle$A।

এইরূপ, $\because$ ACDF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

$\therefore$ $\angle FDB = \angle A$।

$\therefore$ $\angle EDC = \angle FDB = \angle A$।

কিন্তু, $\angle ADC = \angle ADB$, ($\because$, প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ $\angle ADE = \angle ADF$, (সমান সমান কোণের পূবক বলিয়া)।

অর্থাৎ, AD, $\angle$FDEকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। এইরূপে প্রমাণ কবা যায় যে BE ও CF যথাক্রমে $\angle$DEF ও $\angle$EFDকে সমদ্বিখণ্ডিত কবে।

ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। পাদত্রিভুজের যে কোন দুই বাহু মূল ত্রিভুজের যে বাহুর উপর মিলিত হয় সেই বাহুর সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[Every two sides of a pedal triangle are equally inclined to that side of the original triangle on which they meet.]

কারণ, ৩০৫ পৃষ্ঠায় প্রমাণিত হইয়াছে যে $\angle EDC = \angle FDB$;

অর্থাৎ, DE ও DF সরল রেখাদ্বয় BCএর সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

এইরূপে প্রমাণিত হইবে যে ED ও EF, CA বাহুর সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে ; এবং FE ও FD, AB বাহুর সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। ৩০৫ পৃষ্ঠার চিত্রে $\triangle ABC$, $\triangle DEC$, $\triangle EFA$ ও $\triangle FDB$ পরস্পর সদৃশকোণ।

কারণ, প্রমাণিত হইয়াছে যে $\triangle DEC$এর

$$\angle EDC = \angle A,$$

এইরূপ, $\angle DEC = \angle B$ ।

$\therefore$ $\triangle DEC$এর কোণগুলি যথাক্রমে $\triangle ABC$এর কোণগুলির সমান।

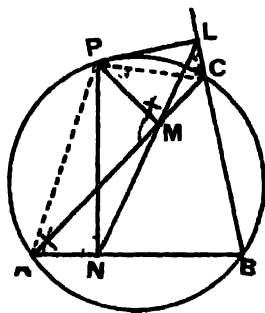
অর্থাৎ, $\triangle DEC$, $\triangle ABC$এর সহিত সদৃশকোণ।

এইরূপ, $\triangle EFA$ ও $\triangle FDB$ প্রত্যেকে $\triangle ABC$এর সহিত সদৃশকোণ।

সিম্‌সনের রেখা (Simson's Line)

১৪৭। কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের যে কোন বিন্দু হইতে ঐ ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলির পদত্রয় এক সরল রেখায় থাকিবে।

[The feet of the perpendiculars drawn to the three sides of a triangle from any point on its circumcircle are collinear.]

মনে কর P, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর যে কোন একটি বিন্দু, এবং P হইতে BC, CA ও AB বাহুর উপর (অথবা বর্দ্ধিত বাহুর উপর) যথাক্রমে PL, PM ও PN লম্ব অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে L, M ও N একই সরল রেখায় অবস্থিত।

LM, MN, PA ও PC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∠PMC ও ∠PLC প্রত্যেকে সমকোণ ;

∴ PLCM একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ ∠PML = ∠PCL, (এক বৃত্তাংশস্থ কোণ বলিয়া)

= ∠PCB এর সম্পূরক কোণ

= ∠PAB অর্থাৎ ∠PAN, (∵ P, A, B, C, একই বৃত্তস্থ)

আবার, প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া, ∠PMA = ∠PNA,

∴ P, M, N, A বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ ;

সুতরাং, ∠PMN + ∠PAN = দুই সমকোণ ;

কিন্তু, ∠PAN = ∠PML (প্রমাণিত)

∴ ∠PMN + ∠PML = দুই সমকোণ।

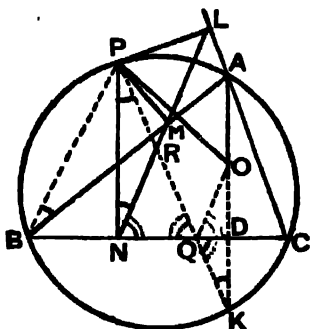
∴ LM ও MN একই সরল রেখায় অবস্থিত।

অর্থাৎ L, M ও N একই সরল রেখায় অবস্থিত। ই. উ. বি.

মন্তব্য। LMN সরল রেখাকে P বিন্দুর **সিম্‌সনের রেখা** বা P বিন্দুর **পাদরেখা** (Pedal line) বলে।

১৪৮। ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর সহিত ঐ ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর সংযোজক সরল রেখা পূর্ব্বোক্ত বিন্দুর পাদরেখা (সিম্‌সনের রেখা) দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

মনে কর O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে পরিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু Pএর পাদরেখা LMN, PO সরল রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

AOকে বর্দ্ধিত কর; উহা যেন BCকে D বিন্দুতে ও পরিবৃত্তকে K বিন্দুতে ছেদ করিল।

PK সংযুক্ত কর, উহা যেন LNকে R বিন্দুতে ও BCকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। PMNB একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠PNM = ∠PBM

= ∠PKA, (∵ AP চাপের উপর দণ্ডায়মান)

= একান্তর ∠KPN, (∵ AD ও PN সমান্তরাল)

অর্থাৎ, ∠PNR = ∠NPR ; ∴ PR = NR।

এখন, ∵ △PNQএর ∠PNQ = এক সমকোণ,

∴ ∠RNQ = ∠RQN, (∵ সমান সমান কোণের পূরক)

∴ QR = NR = PR ;

অর্থাৎ, R, PQএর মধ্যবিন্দু।

আবার, ∵ BC, OKকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিতেছে, (১৪৪ অনু.)

∴ ODQ ও KDQ ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম ;

∴ $\angle OQD = \angle KQD =$ বিপ্রতীপ $\angle RQN = \angle RNQ$।

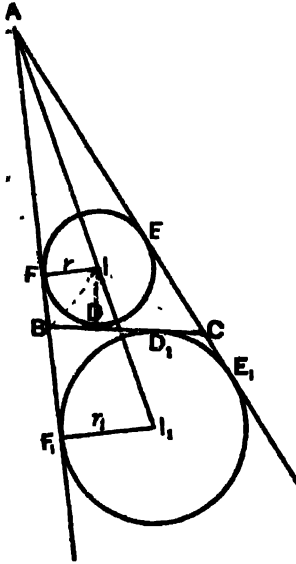
∴ QO এবং NM পরস্পর সমান্তরাল।

এখন, ∵ PQO ত্রিভুজে R, PQএর মধ্যবিন্দু; এবং RM, QOএর সমান্তরাল,

∴ RM অর্থাৎ LMN, POকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (২৩ক উপপাদ্য)

ই. উ বি.

ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত (In-circle) ও বহির্বৃত্ত (Ex-circle)

১৪৯। মনে কর ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি উহার অন্তর্বৃত্তকে D, E, F, বিন্দুতে স্পর্শ করে; এবং BC বাহু, বর্দ্ধিত AC ও AB বাহু বহির্বৃত্তকে যথাক্রমে D_1, E_1, F_1 বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$;

$s =$ অর্দ্ধপরিসীমা $= \frac{1}{2}(a+b+c)$;

অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ $= r$,

এবং বহির্বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ $= r_1$,

নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলি সহজে প্রমাণ করা যায়:

(ক) $AE = AF$, $BD = BF$ এবং $CD = CE$,

($\because$ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান)।

$$\therefore \quad AE + CD + BF$$
$$= \frac{1}{2}(BD + CD + CE + AE + AF + BF)$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c) = s;$$

$$AE + AF = AC - CE + AB - BF$$
$$= AC + AB - (CD + BD) = b + c - a = 2(s-a)।$$

$$\therefore \quad AE = AF = \frac{1}{2}(AE + AF) = s - a;$$

এইরূপ, $\quad BD = BF = s - b$;

$\quad CD = CE = s - c$।

(খ) $CD_1 = CE_1$;

$BD_1 = BF_1$,

$AE_1 = AF_1$;

$$AE_1 + AF_1 = AC + CE_1 + AB + BF_1$$
$$= AC + AB + (CD_1 + BD_1)$$
$$= AC + AB + BC = b + c + a$$

$\therefore \quad AE_1 = AF_1 = \frac{1}{2}(AE_1 + AF_1) = \frac{1}{2}(a + b + c) = s$ ।

(গ) $CD_1 = CE_1 = AE_1 - AC = s - b$,

এইরূপ, $BD_1 = BF_1 = s - c$ ।

(ঘ) $BD_1 = s - c = CD$ [(ক) দেখ]

$CD_1 = s - b = BD$ ।

(ঙ) $FF_1 = AF_1 - AF = s - (s - a) = a = EE_1$

(চ) $\Delta ABC = \Delta IBC + \Delta ICA + \Delta IAB$

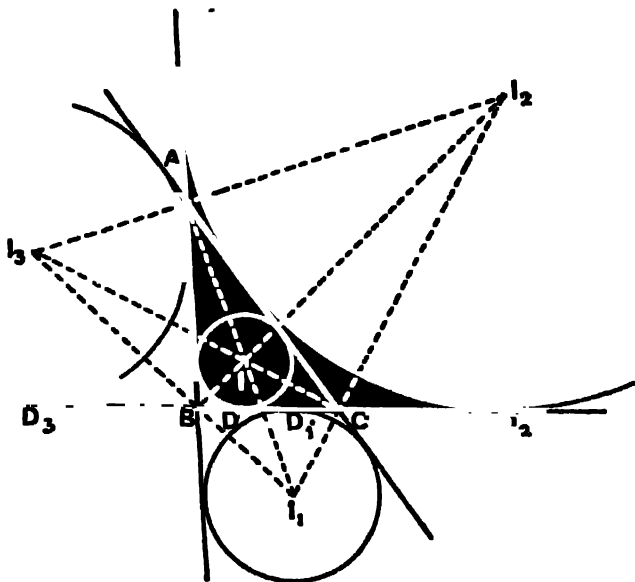
$$= \frac{1}{2} r.a + \frac{1}{2} r.b + \frac{1}{2} r.c ;$$
$$= \frac{1}{2} r (a + b + c) = rs ;$$

এইরূপ, $\Delta ABC = \Delta I_1CA + \Delta I_1AB - \Delta I_1BC$

$$= \frac{1}{2} r_1 b + \frac{1}{2} r_1 c - \frac{1}{2} r_1 a$$
$$= \frac{1}{2} r_1 (b + c - a) = r_1 (s - a)$$

$\therefore \quad \Delta ABC = rs = r_1 (s - a)$ ।

মন্তব্য। $\angle C$ সমকোণ হইলে উপরের নির্দেশমত চিত্র অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে $r = s - c$; $r_1 = s - b$ ।

১৫০। মনে কর I, ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ; এবং যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুকে এবং বর্দ্ধিত অপর দুই বাহুকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_1, I_2, I_3.

A, B, C ; I, I_1, I_2, I_3 বিন্দুগুলির নিম্নলিখিত সম্বন্ধ সহজে প্রমাণ করা যায় :

(ক)	A, I, I_1	বিন্দুগুলি	একরেখীয়
	B, I, I_2	"	"
	C, I, I_3	"	"
(খ)	I_2, A, I_3	"	"
	I_3, B, I_1	"	"
	I_1, C, I_2	"	"

(গ) ∠BIC, ∠CIA ও ∠AIB যথাক্রমে

$$90^\circ+\frac{\angle A}{2},\ \ 90^\circ+\frac{\angle B}{2},\ \ 90^\circ+\frac{\angle C}{2}\ ।$$

(ঘ) $\triangle I_1I_2I_3$এর I_1, I_2 ও I_3 বিন্দুর কোণগুলি যথাক্রমে

$$90^\circ-\frac{\angle A}{2},\ \ 90^\circ-\frac{\angle B}{2}\ ও\ 90^\circ-\frac{\angle C}{2}\ ।$$

(ঙ) BI_1C, CI_2A, AI_3B, $I_1I_2I_3$ ত্রিভুজগুলি পরস্পর সদৃশকোণ।

(চ) অন্তর্বৃত্তের স্পর্শবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে উৎপন্ন ত্রিভুজ $I_1I_2I_3$ ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ হইবে।

(ছ) I, I_1, I_2, I_3 এই চারিটি বিন্দুর যে কোন একটি অপর তিনটি বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (Orthocentre) হইবে।

(জ) I, I_1, I_2, I_3 এই চারিটি বিন্দুর যে কোন তিনটির মধ্য দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে যে চারিটি বৃত্ত উৎপন্ন হয় তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

(ঝ) অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ, r, I_1, I_2 ও I_3 কেন্দ্রবিশিষ্ট বহির্বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 ; এবং S, ত্রিভুজের কালি হইলে

(i) $S=rs=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)$;

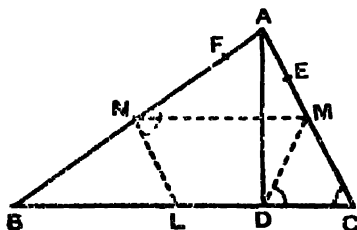
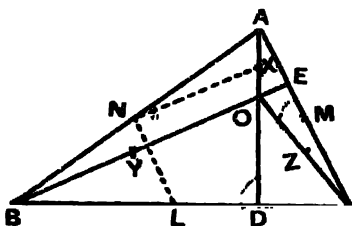
[১৪৯ অনু., (চ)]

(ii) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$;

(iii) $S^2=rr_1r_2r_3$ ।

নব-বিন্দু বৃত্ত (Nine-points circle)

১৫১। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্যবিন্দু, শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বের পদত্রয়, এবং লম্ববিন্দুর সহিত শীর্ষ-সংযোজক সরল রেখা তিনটির মধ্যবিন্দুত্রয়, এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর থাকিবে।

[In any triangle the middle points of the sides, the feet of the perpendiculars from the vertices to the opposite sides and the middle points of the lines joining the orthocentre to the vertices lie on a circle.]

প্রথম চিত্র   দ্বিতীয় চিত্র

মনে কর ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বগুলির পদ যথাক্রমে D, E, F; L, M, N বিন্দুগুলি যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু। O, লম্ববিন্দু, এবং X, Y, Z যথাক্রমে OA, OB, OCএর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে L, M, N বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত (ক) D, E ও F দিয়া, এবং (খ) X, Y ও Z দিয়া যাইবে।

(ক) NL, NM, MD সংযুক্ত কর, (প্রথম চিত্র)।

প্রমাণ। ∵ N ও M, AB ও ACএর মধ্যবিন্দু।

∴ NM, BCএর সমান্তরাল।

এইরূপ, NL, ACএর সমান্তরাল।

∴ CMNL একটি সামান্তরিক।

∴ ∠LNM = ∠MCD।

আবার, $\because$ $\angle ADC$ = এক সমকোণ ; এবং M, অতিভুজ CAএর মধ্যবিন্দু ;

$\therefore$ MD = MC

$\therefore$ $\angle MDC = \angle MCD$ ।

$\therefore$ $\angle MDC = \angle LNM$ ।

অতএব, LNMD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ , অর্থাৎ LMN বৃত্ত, D বিন্দু দিয়া যাইবে। (অনুসিদ্ধান্ত, ৩৬ ক উপ.)

এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে LMN বৃত্ত E ও F বিন্দু দিয়াও যাইবে।

(খ) LN, NX সংযুক্ত কর, (দ্বিতীয় চিত্র)।

প্রমাণ। $\because$ N ও X, যথাক্রমে AB ও AOএর মধ্যবিন্দু

$\therefore$ NX, BO অর্থাৎ BEএর সহিত সমান্তরাল।

এইরূপ, NL, ACএর সহিত সমান্তরাল।

কিন্তু, BE, ACএর উপর লম্ব

$\therefore$ NX, NLএর উপর লম্ব।

অতএব, NLDX চতুর্ভুজের

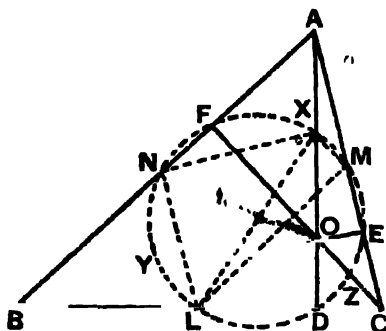
$\angle LDX + \angle LNX$ = দুই সমকোণ, ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ NLDX একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

অর্থাৎ, NLD দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত অর্থাৎ LMN বৃত্ত [(ক) দ্রষ্টব্য] X বিন্দু দিয়া যাইবে। এইরূপে প্রমাণিত হইবে যে LMN বৃত্ত Y ও Z বিন্দু দিয়াও যাইবে।

অতএব, L, M, N ; D, E, F , X, Y, Z. এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপরে থাকিবে। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত। $\because$ $\angle LDX$ = এক সমকোণ, $\therefore$ LX উক্ত নব-বিন্দু বৃত্তের একটি ব্যাস। এইরূপ MY, NZও এক একটি ব্যাস।

১৫২। নব-বিন্দু বৃত্ত (বিকল্প প্রমাণ)

প্রমাণ কবিতে হইবে যে L, M, N, , D, E, F ; X, Y, Z বিন্দুগুলি একই বৃত্তের উপব থাকিবে।

প্রমান। LN, LX, LM, NX ও XM সংযুক্ত কব।

∵ N ও X, AB ও AO এর মধ্যবিন্দু

∴ NX, BO অর্থাৎ BEএর সমান্তবাল।

এইরূপ, NL, ACএব সমান্তবাল।

এখন, ∵ BE ও AC পবস্পর লম্ব,

∴ NX ও NL পরস্পব লম্ব হইবে ;

∴ $\angle$LNX = এক সমকোণ ,

এইরূপে প্রমাণিত হইবে যে $\angle$LMX = এক সমকোণ।

আবাব, $\angle$LDX = এক সমকোণ।

সুতরাং N, M, D বিন্দুগুলি LXকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তেব উপর থাকিবে ;

অর্থাৎ D ও X বিন্দু, LMN বৃত্তের উপর থাকিবে।

এইরূপে প্রমাণিত হইবে যে E ও Y এবং F ও Z বিন্দুও LMN বৃত্তের উপর থাকিবে।

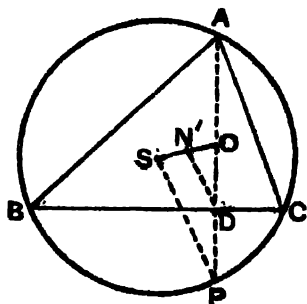
সুতরাং, L, M, N ; D, E, F ; X, Y, Z, এই নযটি বিন্দু একবৃত্তস্থ।

ই. উ. বি.

১৫৩। উল্লিখিত বৃত্ত L, M, N ; D, E, F ; X, Y, Z , এই নয়টি বিন্দু দিয়া যাইতেছে বলিয়া ইহার নাম **নব-বিন্দু বৃত্ত**। অতএব, **পাদত্রিভুজের পরিবৃত্তই মূল ত্রিভুজের নব-বিন্দু বৃত্ত।**

১৫৪। (ক) কোন ত্রিভুজের নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র, সেই বৃত্তের পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দুর সংযোজক সরল রেখার মধ্য-বিন্দু হইবে।

(খ) কোন ত্রিভুজের নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক।

মনে কর O ও S যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র ; এবং N′, SOএর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে N′, নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র ; এবং নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক।

A হইতে BCএর উপর AD লম্ব টান এবং ADকে বর্দ্ধিত কর, উহা যেন পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। N′D ও SP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $\because$ N′ ও D যথাক্রমে OS ও OPএর মধ্যবিন্দু, (১৪৪অনু.)

$\therefore$ N′D = $\frac{1}{2}$ SP = পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক।

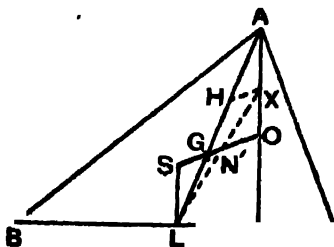
এইরূপ E ও F, যথাক্রমে B ও C হইতে CA ও ABএর উপর লম্বের পদ হইলে, N′E ও N′F প্রত্যেকে পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক হইবে।

$\therefore$ N′, DEF বৃত্তের অর্থাৎ নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র, এবং ইহার ব্যাসার্দ্ধ N′D পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক। ই. উ. বি.

১৫৫। কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু একই সরল রেখার উপর থাকিবে।

[The centroid, the circum-centre and the orthocentre of a triangle are collinear.]

মনে কর S এবং O যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও লম্ব-বিন্দু; এবং মধ্যমা AL, SOকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে G ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র।

LX সংযুক্ত কর ও X বিন্দু দিয়া OGএর সমান্তরাল XH সরল রেখা টান। উহা যেন ALকে H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। LX ও SO পরস্পর N′ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,

∴ N′, নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র ; SN′ = N′O ; এবং LN′ = N′X।

(১৫১ অনু., অনুসিদ্ধান্ত, ও ১৫৪ অনু.)

সুতরাং, N′LS ও N′XO ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম ;

∴ SL = OX = AX।

এখন, LXH ত্রিভুজে N′, LXএর মধ্যবিন্দু, ও N′G, XHএর সমান্তরাল, (অঙ্কন)

∴ G, LHএর মধ্যবিন্দু,

অর্থাৎ, GL = HG।

আবার, AGO ত্রিভুজে

X, AOএর মধ্যবিন্দু, ও XH, OGএর সমান্তরাল, (অঙ্কন)

∴ H, AGএর মধ্যবিন্দু,

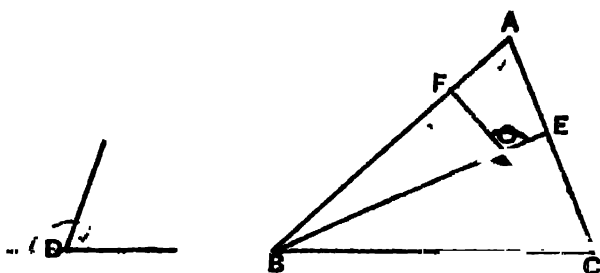
∴ AH = HG = GL,

অর্থাৎ G, মধ্যমা ALএর ত্রিখণ্ডন বিন্দু ;

∴ G, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র। ই. উ. বি.

মন্তব্য। AO = 2 SL।

১৫৬। কোন ত্রিভুজের ভূমি এবং শিরঃকোণ প্রদত্ত থাকিলে, উহার (ক) লম্ববিন্দু ; (খ) অন্তঃকেন্দ্র ; (গ) ভরকেন্দ্র ; এবং (ঘ) নব-বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

[Given the base and the vertical angle of a triangle, to find the locus of (1) the orthocentre, (2) the incentre, (3) the centroid, and (4) the centre of the nine points circle of the triangle.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের ভূমি BC নির্দ্দিষ্ট আছে, এবং ইহার শিরঃকোণ ∠A = নির্দ্দিষ্ট ∠D।

(ক) মনে কর CA ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত BE ও CF লম্বদ্বয় Oতে পরস্পর ছেদ করিল।

Oএর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

∠OEA ও ∠OFA প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া, OEAF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

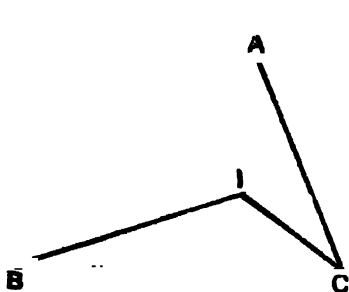
∴ ∠EOF, ∠Aএর সম্পূরক,

কিন্তু, ∠EOF = বিপ্রতীপ ∠BOC,

∴ ∠BOC, ∠A অর্থাৎ ∠Dএর সম্পূরক,

∴ O বিন্দুর সর্ব্বাবস্থানে ∠BOC অপরিবর্ত্তিত থাকিবে।

অতএব, BC বাহুর উপর যে বৃত্তাংশ ∠Dএর সম্পূরক কোণ উৎপন্ন করিবে উহার চাপই O বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে।

মন্তব্য। ইহা সহজে প্রমাণ করা যায় যে BOCএর পরিলিখিত বৃত্ত (Oএর সঞ্চারপথ) ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমান।

(খ) মনে কর, $\angle B$ ও $\angle C$এর দ্বিখণ্ডক BI ও CI পরস্পর অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুতে মিলিত হইল;

Iএর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

ABC ত্রিভুজের তিনকোণ যথাক্রমে A, B ও C দ্বারা এবং BIC কোণ I দ্বারা নির্দ্দেশ করা হইলে IBC ত্রিভুজের

$$I+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=\text{দুই সমকোণ},$$

কিন্তু, ABC ত্রিভুজের $A+B+C=$ দুই সমকোণ

$$\therefore \quad \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=\text{এক সমকোণ}$$

এখন, এই দুইটি ফলের অন্তর,

$$I-\frac{A}{2}=\text{এক সমকোণ},$$

$$\text{অর্থাৎ,} \quad I=\text{এক সমকোণ}+\frac{A}{2}$$

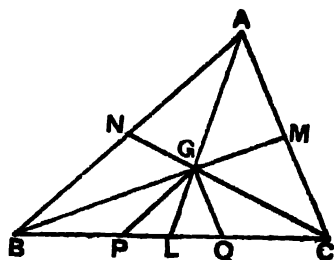
$$=\text{এক সমকোণ}+\frac{1}{2}\angle D\,;$$

কিন্তু $\angle D$ নির্দ্দিষ্ট কোণ হওয়ায়, I কোণ I বিন্দুর সকল অবস্থানেই অপরিবর্ত্তিত থাকিবে।

অতএব, নির্দ্দিষ্ট ভূমি BCএর উপর যে বৃত্তাংশ $90^\circ+\frac{1}{2}\angle D$ উৎপন্ন করিবে উহার চাপই I বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে।

(গ) মনে কর ABC ত্রিভুজের AL, BM ও CN মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব, G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

G বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

G বিন্দু দিয়া যথাক্রমে AB ও ACএর সমান্তরাল করিয়া GP ও GQ অঙ্কিত কর; উহারা যেন BCএর সহিত যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ। $\because$ GN, CNএর এক-তৃতীয়াংশ;

এবং GP, NBএর সমান্তরাল

$\therefore$ BP $= \frac{1}{3}$ BC। (৮৭ অনুচ্ছেদ)

এইরূপ, CQ $= \frac{1}{3}$ BC।

$\therefore$ P ও Q বিন্দুদ্বয় BCএর অন্তর্গত দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

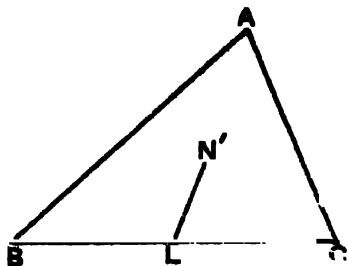
এখন, $\because$ GP, ABএর সমান্তরাল; এবং GQ, ACএর সমান্তরাল;

$\therefore$ $\angle$PGQ $=$ $\angle$BAC $=$ $\angle$D।

$\therefore$ G বিন্দুর সকল অবস্থানেই $\angle$PGQ অপরিবর্ত্তিত থাকিবে।

$\therefore$ PQএর উপর যে বৃত্তাংশ $\angle$D উৎপন্ন করিবে উহার চাপই G বিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।

(ঘ) মনে কর N′, ABC ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

N′এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

L, BCএর মধ্যবিন্দু হইলে, N′L = নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ
= পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক।

এখন, ∵ ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে;

∴ ত্রিভুজের পরিবৃত্ত একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে;

∴ উহার ব্যাসার্দ্ধ নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট হইবে।

∴ N′Lএর দৈর্ঘ্য ও N′ এর সকল অবস্থানেই অপরিবর্ত্তিত থাকিবে। অতএব, Lকে কেন্দ্র করিয়া পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক (N′L) ব্যাসার্দ্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই N′এর নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।

অনুশীলনী ৫৪

*১। △DEF, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ। প্রমাণ কর যে DEF ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে ∠A, ∠B, ও ∠C কোণের সম্পূরক।

*২। O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে O, A, B, C বিন্দু চারিটির যে কোন একটি, অপর তিন বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইবে।

*৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে। উহার লম্ববিন্দু ও শীর্ষ-সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*৪। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে; উহার বহিঃকেন্দ্রগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৫। ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও বহিঃকেন্দ্রত্রয় যথাক্রমে I, I_1, I_2, I_3 হইলে প্রমাণ কর যে I, I_1, I_2, I_3 বিন্দু চারিটির যে কোন একটি অপর তিন বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইবে।

*৬। ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের পদত্রয় নির্দ্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত: মূল ত্রিভুজের বাহুগুলি পাদত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক।]

৭। প্রমাণ কর যে সূক্ষ্মকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু যথাক্রমে উহাদের পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও বহিঃকেন্দ্র হইবে।

*৮। এক বিন্দু হইতে কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর লম্বের পদত্রয় একই সরল রেখায় অবস্থিত থাকিলে প্রমাণ কর যে ঐ বিন্দু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর থাকিবে।

*৯। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে। প্রমাণ কর যে ঐ ত্রিভুজের নব-বিন্দু বৃত্ত একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

[সঙ্কেত: △ABCএর BC ভূমি নির্দ্দিষ্ট থাকিলে, BCএর মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও পরিবৃত্তের সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত নব-বিন্দু বৃত্তকে স্পর্শ করে।]

১০। প্রমাণ কর যে P ও Q, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের দুইটি বিন্দু হইলে P ও Qএর সিমসন রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ PQ চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ কোণের সমান।

*১১। O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু; এবং AQ, পরিবৃত্তের একটি ব্যাস; প্রমাণ কর যে BOCQ এক সামান্তরিক।

[সঙ্কেত : QB এবং বর্দ্ধিত CO প্রত্যেকে AB এর উপর লম্ব ;
∴ উহারা সমান্তরাল ; এইরূপে, QC ও BO পরস্পর সমান্তরাল ।]

১২। O, △ABC এর লম্ববিন্দু। প্রমাণ কর যে BOC, COA, AOB ও ABC ত্রিভুজের প্রত্যেকের নব-বিন্দু বৃত্ত একই।

এইরূপে প্রমাণ কর যে উক্ত ত্রিভুজগুলির পরিবৃত্তগুলিও সমান।

[সঙ্কেত : △DEF প্রত্যেক ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ ।]

১৩। ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও বহিঃকেন্দ্রত্রয় যথাক্রমে I, I_1, I_2, I_3 হইলে প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত, II_2I_3, II_3I_1, II_1I_2, $I_1I_2I_3$ ত্রিভুজের প্রত্যেকটির নব-বিন্দু বৃত্ত হইবে। শেষোক্ত ত্রিভুজগুলির পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের দ্বিগুণ হইবে।

১৪। ABC ত্রিভুজের AD, BC এর উপর লম্ব ; O, লম্ববিন্দু ; AB > AC , এবং L, X, M যথাক্রমে BC, AO ও AC এর মধ্যবিন্দু হইলে প্রমাণ কর যে

$$\angle LXD = \angle LMD = \angle C - \angle B \text{ ।}$$

১৫। কোন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর, এবং নব বিন্দু বৃত্ত দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(১৪ প্রশ্ন দেখ)

*১৬। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং পরিবৃত্ত নির্দ্দিষ্ট থাকিলে প্রমাণ কর যে উহার নব-বিন্দু বৃত্তও নির্দ্দিষ্ট থাকিবে।

*১৭। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে ; প্রমাণ কর যে উহার পরিবৃত্ত একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

১৮। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে। উহার বহিঃকেন্দ্রত্রয় দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

১৯। কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দ্দিষ্ট আছে। প্রমাণ কর যে উহার পাদত্রিভুজের এক বাহু ও এক কোণের পরিমাণ স্থির থাকিবে।

[যথা, $\triangle ABC$এর BC বাহু ও $\angle A$ দেওয়া থাকিলে, উহার পাদত্রিভুজ DEFএর EF বাহু ও $\angle FDE$ নির্দ্দিষ্ট থাকিবে ; কারণ, $\angle FDE = 180^\circ - 2A$, এবং EF, DEF ত্রিভুজের পরিবৃত্তের এমন একটি জ্যা যাহা পরিধিতে একটি নির্দ্দিষ্ট কোণ $(180^\circ - 2A)$ উৎপন্ন করে।]

*২০। একটি নির্দ্দিষ্ট কোণের বাহুদ্বয়ের উপর একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যযুক্ত সরল রেখার প্রান্তদ্বয় অবস্থিত আছে। প্রমাণ কর যে উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ প্রত্যেকে এক একটি বৃত্ত হইবে।

[সঙ্কেত : ১৭ প্রশ্ন দেখ। সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্ত্তী ; ১৫৫ অনুচ্ছেদে $AO = 2\ SL$]

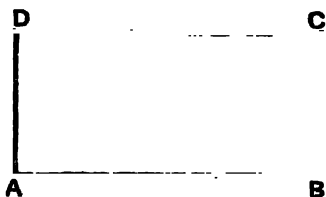
চতুর্থ খণ্ড

বীজগণিতের সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য

১৫৭। কোন আযতক্ষেত্রেব দুইটি সন্নিহিত বাহু জানা থাকিলে উহাকে সম্পূর্ণভাবে অঙ্কিত কবা যায়। এইজন্য, যে কোন আয়তক্ষেত্রকে উহার দুইটি সন্নিহিত বাহুদ্বাবা উল্লেখ কবা যাইতে পাবে।

১৫৮। কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু X ও Y হইলে, উহাকে 'X ও Y **বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র**' বলে, এবং উহা সংক্ষেপে, '**আয়তক্ষেত্র** X, Y'; অথবা, 'X . Y', এইরূপে লিখিত হয।

পার্শ্বের চিত্রে, ABCD একটি আযতক্ষেত্র। উহাকে সংক্ষেপে, 'AB, AD আয়তক্ষেত্র' বা 'AB. AD', এইরূপে প্রকাশ কবা যায।

এইরূপ, AB সরল রেখাব উপব অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে সংক্ষেপে, 'ABএর উপব বর্গক্ষেত্র', অথবা 'AB^2', বলা হয।

'$AB^2 = X. Y$' লিখিলে বুঝিতে হইবে যে ABএব উপব অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র X ও Y বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রেব সমান।

১৫৯। যে কোন চতুর্ভুজকে উহার বিপরীত শীর্ষ দুইটি দ্বাবাও উল্লেখ করা হইয়া থাকে।

যথা, আযতক্ষেত্র ABCDকে সংক্ষেপে 'আযতক্ষেত্র AC' বা 'আযতক্ষেত্র BD' এইরূপ বলা হয।

১৬০। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা AB কিংবা উহার বর্দ্ধিত অংশের উপর কোন বিন্দু P লইলে, সরল রেখাটি P বিন্দুতে AP ও BP অংশে (Segment) বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়। P বিন্দুটি AB সরল রেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের ভিতরে বা বাহিরে থাকিলে সরল রেখাটি P বিন্দুতে যথাক্রমে **অন্তর্বিভক্ত** ও **বহির্বিভক্ত** হইয়াছে বলা হয়।

A P B A B P

প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

১ম চিত্রে AB সরল রেখাটি P বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইয়াছে।

২য় চিত্রে AB সরল রেখাটি P বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য। (ক) উভয়রূপ বিভাগেই P বিন্দু হইতে AB সরল রেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের দূরত্বই বিভক্ত অংশদ্বয়ের পরিমাণ।

(খ) অন্তর্বিভাগে, **বিভক্ত অংশের সমষ্টি = সরল রেখার দৈর্ঘ্য।**

যথা, ১ম চিত্রে $PA + PB = AB$।

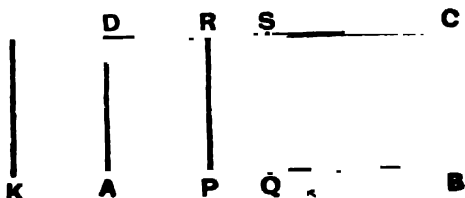
(গ) বহির্বিভাগে, **বিভক্ত অংশের অন্তর = সরল রেখার দৈর্ঘ্য।**

যথা, ২য় চিত্রে $PA - PB = AB$।

উপপাদ্য ৪৬

[বীজগণিতের '$k.(a+b+c\cdots)=ka+kb+kc\cdots\cdots$' সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য।]

যদি দুই সরল রেখার একটি যে কোন অংশে বিভক্ত হয় তাহা হইলে ঐ রেখা দুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, অবিভক্ত রেখা ও বিভক্ত রেখাব প্রত্যেক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র গুলির সমষ্টির সমান।

[If, of two straight lines, one is divided into any number of parts, the rectangle contained by the two lines is equal to the sum of the rectangles contained by the undivided line and the several parts of the divided line.]

মনে কর AB ও K দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; এবং AB সরল রেখা AP, PQ, QB অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $K.AB = K.AP + K.PQ + K.QB$।

AB সরল রেখার A বিন্দুতে Kএব সমান করিয়া AD লম্ব টান; এবং D বিন্দু দিয়া ABএর সমান্তরাল DC সরল রেখা টান। এখন, P, Q,

B বিন্দু হইতে যথাক্রমে ADএর সমান্তরাল করিয়া PR, QS, BC সরল রেখা তিনটি অঙ্কিত কর। ইহারা যেন DCকে যথাক্রমে R, S, C বিন্দুতে ছেদ করিল ;

প্রমাণ। ABCD, APRD, PQSR ও QBCS, ইহারা প্রত্যেকে এক একটি আয়তক্ষেত্র।

এখন, আয়তক্ষেত্র ABCD

= APRD ক্ষেত্র + PQSR ক্ষেত্র + QBCS ক্ষেত্র।

কিন্তু, ABCD = AD.AB = K. AB, ($\because$ AD = K)

APRD = AD.AP = K.AP ;

PQSR = PR.PQ = K.PQ ; ($\because$ PR = বিপরীত বাহু AD)

এবং QBCS = QS.QB = K.QB

($\because$ QS = বিপরীত বাহু PR = AD)

$\therefore$ K.AB = K.AP + K.PQ + K.QB। ই. উ. বি.

মন্তব্য। যদি K, AP, PQ ও QBএর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে k, a, b, c একক হয়, তাহা হইলে ABএর দৈর্ঘ্য $= (a+b+c)$ একক।

$\therefore$ K.AB = K ও AB বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= k(a+b+c)$ বর্গ একক।

এইরূপ, K.AP $= ka$ বর্গ একক ; K.PQ $= kb$ বর্গ একক ;

K.QB $= kc$ বর্গ একক।

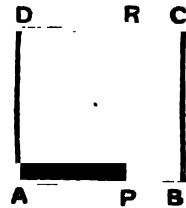
$\therefore$ $k(a+b+c)$ বর্গ একক $= (ka+kb+kc)$ বর্গ একক

অর্থাৎ, $k(a+b+c) = ka+kb+kc$।

অতএব, ৪৬ উপপাদ্য বীজগণিতের '$k(a+b+c) = ka+kb+kc$' সূত্রের অনুরূপ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। যদি AD = AB হয় এবং ABকে P বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত করা হয়, তাহা হইলে,
AD.AB = AD.AP + AD.PB ;

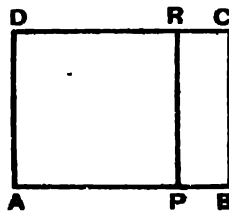
কিন্তু, AD.AB = ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অর্থাৎ AB^2 ;

∴ AB^2 = AB.AP + AB. PB ।

অর্থাৎ, কোন সরল রেখা দুই অংশে বিভক্ত হইলে সমস্ত সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, ঐ রেখা এবং উহার প্রত্যেক অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রগুলির সমষ্টির সমান।

[If a straight line is divided into two parts, the square on the whole is equal to the sum of rectangles contained by the whole line and each of the parts.]

অনুসিদ্ধান্ত ২। যদি AB সরল রেখা P বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হয় এবং AD = AP হয়, তাহা হইলে,

∵ AD. AB = AD. AP + AD.PB

∴ AP. AB = AP^2 + AP.PB ।

অর্থাৎ, কোন সরল রেখা দুই অংশে বিভক্ত হইলে সমস্ত সরল রেখা ও উহার একটি অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, উক্ত অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র এবং অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

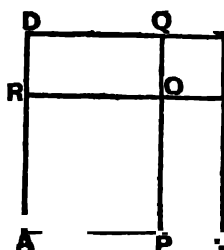
[If a straight line is divided into two parts, the rectangle contained by the whole line and one part is equal to the square on that part together with the rectangle contained by the two parts.]

বিশেষ দ্রষ্টব্য। 'AP. AB' দ্বারা AP ও ABএর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বুঝায়, AP ও ABএর গুণফল নহে।

উপপাদ্য ৪৭

[বীজগণিতের '$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$' সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য]

যদি কোন সরল রেখাকে একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করা হয় তাহা হইলে সমস্ত সরল রেখার উপর বর্গক্ষেত্র, উহার অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয় ও ঐ অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

[If a straight line is divided internally at any point, the square on the whole line is equal to the sum of the squares on the two parts together with twice the rectangle contained by the parts.]

মনে কর AB সরল রেখাকে P বিন্দুতে AP ও PB, এই দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB^2=AP^2+PB^2+2\ AP.PB$।

ABএর উপর ABCD বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর; এবং AD হইতে APএর সমান করিয়া AR অংশ কাটিয়া লও। এখন, P ও R বিন্দু হইতে যথাক্রমে AD ও ABএর সমান্তরাল করিয়া PQ ও RS সরল রেখা অঙ্কিত কর। ইহারা যেন পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। অঙ্কনানুসারে AD=AB;

AR=AP;

∴ RD=PB=OS=OQ।

এখন, AC ক্ষেত্র=AO ক্ষেত্র+OC ক্ষেত্র+RQ ক্ষেত্র+PS ক্ষেত্র।

কিন্তু, AC ক্ষেত্র = ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র বা AB^2

AO ক্ষেত্র = APএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র বা AP^2, ($\because$ AR = AP)

OC ক্ষেত্র = CS বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র বা OS^2

$= PB^2$, ($\because$ OS = PB)

RQ ক্ষেত্র = RO ও RD বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র

= AP ও PB বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র

= AP. PB, ($\because$ RO = AP, RD = PB)।

এবং PS ক্ষেত্র = PO ও PB বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র

= AP ও PB বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র

= AP.PB।

$\therefore \quad AB^2 = AP^2 + PB^2 + AP.PB + AP.PB$

$= AP^2 + PB^2 + 2\ AP.PB$। ই. উ. বি.

মন্তব্য। যদি AP ও PB যথাক্রমে a ও b একক হয় তাহা হইলে, $AB = (a+b)$ একক, $\therefore$ AB^2 = ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (a+b)^2$ বর্গ একক, ইত্যাদি।

$\therefore$ ৪৭ উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে

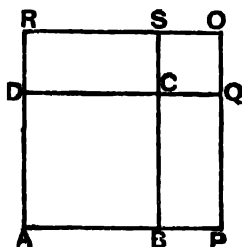
$(a+b)^2$ বর্গ একক $= (a^2+b^2+2ab)$ বর্গ একক

অর্থাৎ, $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$।

উপপাদ্য ৪৮

[বীজগণিতের '$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$' সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য]

যদি এক সরল রেখাকে কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে বহির্বিভক্ত করা হয় তাহা হইলে ঐ সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি এবং অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের অন্তরফলের সমান।

[If a straight line is divided externally at any point, the square on the given line is equal to the sum of the squares on the two parts diminished by twice the rectangle contained by the parts.]

মনে কর AB সরল রেখা P বিন্দুতে AP ও PB অংশদ্বয়ে বহির্বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB^2=AP^2+PB^2-2\ AP.PB$।

APএর উপর APOR বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। AR হইতে ABএর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও। B ও D হইতে যথাক্রমে AR ও ABএর সমান্তরাল করিয়া BS ও DQ সরল রেখাদ্বয় অঙ্কিত কর। ইহারা যেন পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। অঙ্কনানুসারে $AR=AP$,

$AD=AB$;

$\therefore\ DR=PB$;

$\therefore\ CS=CO=PB=DR$;

এখন, AC ক্ষেত্র = AO ক্ষেত্র − BO ক্ষেত্র − RC ক্ষেত্র

= AO ক্ষেত্র − BO ক্ষেত্র − RQ ক্ষেত্র + SQ ক্ষেত্র ।

কিন্তু, AC ক্ষেত্র = ABএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র বা AB^2, ($\because$ AD = AB)

AO ক্ষেত্র = APএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র বা AP^2

BO ক্ষেত্র = PO ও PB বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র

= AP ও PB বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বা AP.PB

RQ ক্ষেত্র = RO ও DR বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র

= AP ও PBএর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বা AP.PB

($\because$ RO = AP , DR = PB)

SQ ক্ষেত্র = CQএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র

= PBএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র বা PB^2

$\therefore \quad AB^2 = AP^2 - AP.PB - AP.PB + PB^2$

$= AP^2 + PB^2 - 2\,AP.PB$ । ই. উ. বি.

মন্তব্য। যদি AP, PB যথাক্রমে a ও b একক হয়, তাহা হইলে

$AB = (a - b)$ একক ;

সুতরাং, ৪৮ উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে

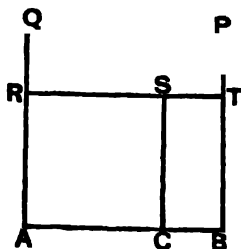
$(a-b)^2$ বর্গ একক $= (a^2 - 2ab + b^2)$ বর্গ একক

অর্থাৎ, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ।

উপপাদ্য ৪৯

[বীজগণিতের '$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$' সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক উপপাদ্য।]

দুই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর ঐ সরল রেখাদ্বয়ের সমষ্টি ও অন্তরের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

[The difference of the squares on two straight lines is equal to the rectangle contained by their sum and difference.]

মনে কর AB ও AC এই নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাদ্বয় এক সরল রেখাতে স্থাপিত হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB^2 - AC^2 = (AB + AC) . (AB - AC)$।

AB ও ACএর উপর যথাক্রমে ABPQ ও ACSR বর্গক্ষেত্রদ্বয় অঙ্কিত কর। বর্দ্ধিত RS যেন BPকে T বিন্দুতে ছেদ করিল।

অঙ্কনানুসারে, AQ = AB এবং AR = AC ; ∴ RQ = CB।

প্রমাণ। AP বর্গক্ষেত্র − AS বর্গক্ষেত্র

= RP আয়তক্ষেত্র + CT আয়তক্ষেত্র

$\therefore \quad AB^2 - AC^2 = RT.RQ + CS.CB$

$= AB.CB + AC.\ CB$

[∵ RT = AB ; RQ = CB ; CS = AC]

= (AB + AC). CB [৪৬ উপপাদ্য]

= (AB + AC) . (AB − AC), (∵ CB = AB − AC) ই. উ. বি.

মন্তব্য। AB = a একক, AC = b একক হইলে,

AB + AC = $(a+b)$ একক ; এবং AB − AC = $(a-b)$ একক।

∴ ৪৯ উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে,

$(a^2 - b^2)$ বর্গ একক = $(a+b)(a-b)$ বর্গ একক।

অর্থাৎ, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$।

অনুসিদ্ধান্ত। যদি একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় এবং অপর একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু Qতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র উক্ত সরল রেখার অর্দ্ধেক ও PQএর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে।

A P Q B — প্রথম চিত্র

A P B Q — দ্বিতীয় চিত্র

যথা, AB, Q বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হইলে (১ম চিত্র),

$$AQ.\ QB = AP^2 - PQ^2।$$

কারণ, $AQ.\ QB = (AP + PQ).\ (PB - PQ)$

$= (AP + PQ).\ (AP - PQ)$

$= AP^2 - PQ^2$।

যদি AB, Q বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হয় (২য় চিত্র),

$$AQ.\ QB = PQ^2 - AP^2।$$

কারণ, $AQ.\ QB = (PQ + AP).\ (PQ - PB)$

$= (PQ + AP).\ (PQ - AP)$

$= PQ^2 - AP^2$।

অনুশীলনী ৫৫

বীজগণিতের নিম্নলিখিত সূত্রের অনুরূপ জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাগুলি প্রমাণ কব এবং উহাদের সাধারণ নির্ব্বচন লেখ :

১। $k(a-b)=ka-kb$

২। $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

৩। $(a+b)(c-d) = ac-ad+bc-bd$

৪। $(a-b)(c+d) = ac-bc+ad-bd$

৫। $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ (ক. প্র., ১৯১৯)

৬। $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

৭। $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

৮। AB সবল বেখাকে P বিন্দু পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন $AP.PB=2AB^2$ হয়।

৯। AB সবল বেখাকে P বিন্দুতে এরূপে অন্তর্বিভক্ত কর যেন $AP.PB=\frac{3}{16}AB^2$ হয়।

১০। P, AB সরল রেখার মধ্যবিন্দু। AB-কে যে কোন বিন্দু Q-তে বিভক্ত করা হইল। প্রমাণ কব যে $AQ^2 \sim BQ^2=2PQ.AB$।

১১। একটি নির্দ্দিষ্ট সবল বেখাকে এইরূপ দুই অংশে বিভক্ত কব যেন সমস্ত বেখা ও এক অংশেব অন্তর্গত আযতক্ষেত্র অন্য অংশেব বর্গক্ষেত্রেব ছযগুণ হয।

[বিশ্লেষণ : মনে কব নির্দ্দিষ্ট সবল বেখাব দৈর্ঘ্য $=a$ একক।

এবং শেষোক্ত অংশের দৈর্ঘ্য $=x$ একক।

$\therefore$ $a(a-x)$ বর্গ একক $=6x^2$ বর্গ একক

অর্থাৎ, $6x^2+ax-a^2=0$

অর্থাৎ, $(3x-a)(2x+a)=0$

$\therefore$ $3x-a=0$, অর্থাৎ, $x=\frac{a}{3}$]

১২। প্রমাণ কর যে কোন সরল রেখার উপর বর্গক্ষেত্র ঐ সরল রেখার অর্দ্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ। (ক. প্র., ১৯৩১)

১৩। এক সরল রেখাকে দুই অংশে বিভক্ত করা হইল। যদি ঐ অংশ দুইটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গ-ক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে ঐ সরল রেখা সমদ্বিখণ্ডিত হইল। (ক. প্র., ১৯১৬)

*১৪। এক সরল রেখাকে এইরূপে অন্তর্বিভক্ত কর যেন অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বৃহত্তম হয়। (৪৯ উপ., অনুসিদ্ধান্ত)

*১৫। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এইরূপে অন্তর্বিভক্ত কর যেন অংশদ্বয়ের বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হয়। (৪৭ উপ. ও ১৪ প্রশ্ন)

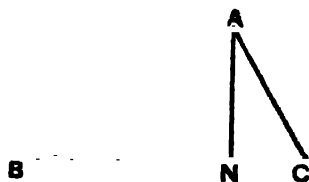
*১৬। D, BC সরল রেখার মধ্যবিন্দু। A, BC বা বর্দ্ধিত BCএর যে কোন বিন্দু হইলে প্রমাণ কর যে $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$।

*১৭। দুইটি নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর। (৪৯ উপপাদ্য)

*১৮। ABC ত্রিভুজের BC ভূমির উপর AD লম্ব টানা হইল। C, BCএর মধ্যবিন্দু হইলে প্রমাণ কর যে

$$AB^2-AC^2=2\ BC\ OD$$ (ক. প্র., ১৯৩০)

*১৯। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্বের বর্গক্ষেত্র, ঐ লম্ব দ্বারা বিভক্ত অতিভুজের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান। (ক. প্র , ১৯২০)

[সঙ্কেত : মনে কর $\triangle ABC$এর $\angle A$ = সমকোণ। BC বাহুর উপর AN লম্ব টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে $AN^2=BN.NC$।

$$\left.\begin{array}{l} AN^2 = AB^2 - BN^2 \\ AN^2 = AC^2 - NC^2 \end{array}\right\}, [\because \angle N = \text{এক সমকোণ}]$$

$\therefore$ যোগ করাতে, $2AN^2 = AB^2 + AC^2 - BN^2 - NC^2$ ।

কিন্তু, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ($\because \angle A =$ এক সমকোণ)

$= (BN + NC)^2$

$= BN^2 + NC^2 + 2\ BN.NC$, (৪৭ উপপাদ্য)

$\therefore \quad 2\ AN^2 = BN^2 + NC^2 + 2\ BN.NC - BN^2 - NC^2$

$= 2\ BN.NC$

অর্থাৎ $AN^2 = BN.NC$]

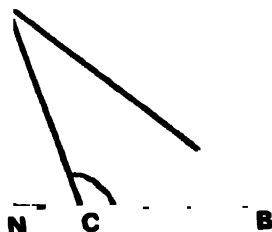
*২০। N, ABC সমকোণী ত্রিভুজের A হইতে অতিভুজ BCএর উপর অঙ্কিত লম্বের পদ।

প্রমাণ কর যে, (ক) $AB^2 = BN.BC$;

(খ) $AC^2 = CN.BC$ ।

উপপাদ্য ৫০

স্থূলকোণী ত্রিভুজে স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি হইতে বৃহত্তর, এবং এই বৃহত্ত্বের পরিমাণ হইবে শেষোক্ত বাহু দুইটির যে কোন একটি ও তাহার উপর অপরটির লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

[In an obtuse-angled triangle, the square on the side opposite to the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the remaining sides *together with* twice the rectangle contained by one of those sides and the *projection of the other side* upon it.]

মনে কর ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ ; এবং AN, A হইতে BC-এর উপর লম্ব। $\therefore$ CN, BC বাহুর উপর AB বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2\, BC.CN$।

প্রমাণ। $BN = BC + CN$;

$\therefore \quad BN^2 = (BC + CN)^2$

$= BC^2 + CN^2 + 2\, BC.CN$ (৪৭ উপপাদ্য)

$\therefore$ উভয় পক্ষে AN^2 যোগ করিলে,

$BN^2 + AN^2 = BC^2 + (CN^2 + AN^2) + 2\, BC.CN$।

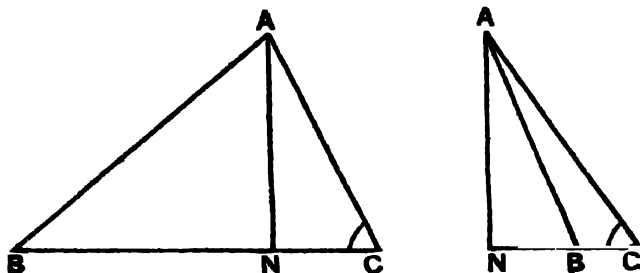
কিন্তু, $\angle N =$ এক সমকোণ ;

$\therefore \quad BN^2 + AN^2 = AB^2$; এবং $CN^2 + AN^2 = CA^2$।

$\therefore \quad AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2\, BC.\, CN$। ই. উ. বি.

উপপাদ্য ৫১

যে কোন ত্রিভুজেব সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি হইতে ক্ষুদ্রতর, এবং এই ক্ষুদ্রত্বের পরিমাণ হইবে শেষোক্ত বাহু দুইটির যে কোন একটি এবং উহার উপর অপরটির লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

[In any triangle, the square on the side opposite to an acute angle is equal to the sum of the squares on the remaining sides *diminished by* twice the rectangle contained by one of those sides and the *projection of the other side* upon it.]

মনে কব ABC ত্রিভুজের $\angle C$ একটি সূক্ষ্মকোণ, এবং AN, A হইতে BC বাহুব উপব লম্ব। সুতবাং, CN, CB বাহুর উপব AC বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\ BC.\ CN$।

প্রমাণ। BN, BC ও CN অংশদ্বয়ের অন্তর।

$\therefore\ BN^2 = BC^2 + CN^2 - 2\ BC.\ CN,$ (৪৮ উপপাদ্য)

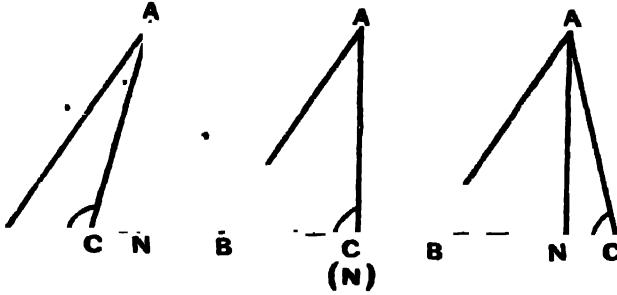
উভয় পক্ষে AN^2 যোগ কবিলে,

$BN^2 + AN^2 = BC^2 + (CN^2 + AN^2) - 2\ BC.\ CN$।

কিন্তু, $\angle N$ = এক সমকোণ;

$\therefore\ BN^2 + AN^2 = AB^2$; এবং $CN^2 + AN^2 = CA^2$।

$\therefore\ AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\ BC.\ CN$ ই. উ. বি.

১ম মন্তব্য। ৫০, ২৮ ও ৫১ উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে

(ক) $\angle ACB$ স্থূলকোণ হইলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2\ BC.CN$;
(খ) $\angle ACB$ সমকোণ হইলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$;
(গ) $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ হইলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2\ BC.CN$ ।

অতএব, উক্ত উপপাদ্য তিনটির সাধারণ নির্বাচন যুক্তভাবে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায় :

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর বিপরীত কোণ যদি স্থূলকোণ, সমকোণ অথবা সূক্ষ্মকোণ হয়, তাহা হইলে ঐ বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র যথাক্রমে অন্য বাহু দুইটির উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি হইতে বৃহত্তর, সমষ্টির সমান, অথবা ঐ সমষ্টি হইতে ক্ষুদ্রতর হইবে ; অসমান স্থলে উহাদের অন্তর হইবে, কোণের বাহুদ্বয়ের যে-কোন একটি ও তাহার উপর অপরটির লম্ব-অভিক্ষেপ, এই উভয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

২য় মন্তব্য।

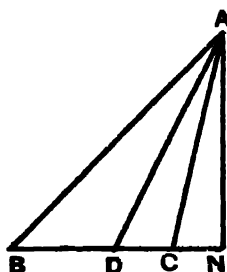
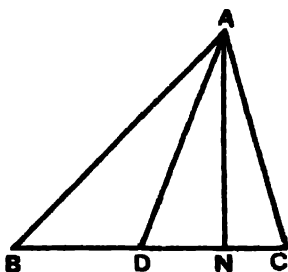
$\angle ACB$ স্থূলকোণ হইলে, $AB^2 > BC^2 + CA^2$;
$\angle ACB$ সমকোণ হইলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$;
$\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ হইলে, $AB^2 < BC^2 + CA^2$ ।

$\therefore$ কোন ত্রিভুজের তিন বাহু দেওয়া থাকিলে উহার কোন্ কোণ স্থূলকোণ, সমকোণ কি সূক্ষ্মকোণ, তাহা সহজে নির্ণয় করা যায়।

উপপাদ্য ৫২

(এপলোনিয়সের উপপাদ্য)

কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, উহার তৃতীয় বাহুর অর্দ্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্র ও শেষোক্ত বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ।

[In any triangle, the sum of the squares on any two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median which bisects the third side.]

মনে কর D, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু। AD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে

$AB^2+AC^2=2\ BD^2+2\ AD^2$ ।

BC বাহুর উপর AN লম্ব টান।

প্রমাণ। উভয় চিত্রে $\angle ADN$ সূক্ষ্মকোণ;

$\therefore$ $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

$\therefore$ $AB^2=BD^2+AD^2+2\ BD\ .\ DN$

এবং $AC^2=CD^2+AD^2-2\ CD\ .\ DN$

$=BD^2+AD^2-2\ BD\ .\ DN,$ ($\because$ $CD=BD$)

যোগ করিয়া, $AB^2+AC^2=2\ BD^2+2\ AD^2$ । ই. উ. বি.

অনুশীলনী ৫৬

*১। P, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমি বা বর্দ্ধিত BCএর যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে

$AB^2 \sim AP^2 = PB.\ PC$* (ক. প্র., ১৯১৯)

[সঙ্কেত: A হইতে BCএর উপর AD লম্ব টান। তাহা হইলে

$$BD = CD\ ।$$

এখন, $AB^2 = BD^2 + AD^2$

$AP^2 = PD^2 + AD^2$

$\therefore\ AB^2 \sim AP^2 = BD^2 \sim PD^2 = (BD + PD)(BD \sim PD)$, ইত্যাদি।]

২। ABCD চতুর্ভুজের $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$। প্রমাণ কর যে উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব হইবে।

৩। ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি 8″, 5″, 4″; প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী হইবে।

৪। ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটি 8″, 5″, 7″; প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী হইবে।

৫। একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে 16 সে. মি., 12 সে. মি., ও 7 সে. মি.; উহাদের যে কোন বাহুর উপর অপর দুই বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

*৬। প্রমাণ কর যে কোন সামান্তরিকের কর্ণ দুইটির উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি উহার বাহুগুলির উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

(ক. প্র., ১৯৩১, ঐচ্ছিক)

*৭। ABCD আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরস্থ যে কোন বিন্দু Pএর সহিত A, B, C, D সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে AP ও CPএর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি BP ও DPএর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান। (ক. প্র., ১৯২১)

---

* ইহাকে পেপ্পাসের উপপাদ্য (Theorem of Pappus) বলে।

*৮। G, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সম্পাতবিন্দু। প্রমাণ কর যে

$$AB^2+BC^2+CA^2=3\ (GA^2+GB^2+GC^2)$$

*৯। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির তিনগুণ মধ্যমাগুলির উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির চারিগুণের সমান।

(ক. প্র., ১৯৩৩, ঐচ্ছিক)

১০। প্রমাণ কর যে কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর বর্গক্ষেত্র এবং কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরল রেখার উপর বর্গক্ষেত্রের চতুর্গুণের সমষ্টির সমান।

(ক. প্র., ১৯২৪, ঐচ্ছিক)

১১। ABC ত্রিভুজের BC ভূমিকে P ও Q বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত করা হইল। প্রমাণ কর যে

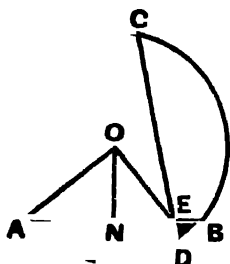
$$AB^2+AC^2=AP^2+AQ^2+4\ PQ^2\ ।$$

*১২। A ও B দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। যদি অপর একটি বিন্দু P এরূপে ভ্রমণ করে যে PA^2+PB^2 সর্ব্বাবস্থায় অপরিবর্ত্তিত থাকে, তবে P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [৫২ উপপাদ্য দ্রষ্টব্য]

বৃত্ত সম্বন্ধীয় আয়তক্ষেত্র

উপপাদ্য ৫৩

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা বৃত্তের অন্তঃস্থ বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

[If two chords of a circle intersect at a point within the circle, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.]

মনে কর ABC বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় উহার অন্তঃস্থ E বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে AE . EB = CE. DE।

মনে কর O, বৃত্তের কেন্দ্র। O হইতে ABএর উপর ON লম্ব টান।

OA, OE সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $AE.EB = (AN + NE).(NB - NE)$

$= (AN + NE).(AN - NE)$, ($\because$ ON, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে)

$= AN^2 - NE^2$ (উপ. ৪৯)

$= (AN^2 + ON^2) - (NE^2 + ON^2)$

$= OA^2 - OE^2$, ($\because \angle ONA = \angle ONE =$ সমকোণ)

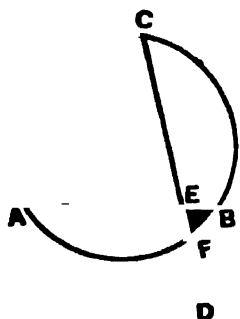
$=$ ব্যাসার্দ্ধ$^2 - OE^2$।

এইরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে

$CE.\ ED =$ ব্যাসার্দ্ধ$^2 - OE^2$।

$\therefore$ $AE.\ EB = CE.\ ED$। ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কতকগুলি জ্যা অঙ্কিত করিলে উহাদের প্রত্যেকের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যার অর্দ্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২। দুইটি সীমাবদ্ধ সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে যদি একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ সরল রেখা দুইটির প্রান্ত বিন্দুগুলি একবৃত্তস্থ হইবে।

মনে কর AB ও CD সরল রেখাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করিল। যদি AE.EB = CE.ED হয়, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B, C ও D একই বৃত্তের উপর থাকিবে।

প্রমাণ। মনে কর A, B ও C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত CD অথবা বর্দ্ধিত CDকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, AB ও CF জ্যাদ্বয় F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে বলিয়া AE. EB = CE. EF।

কিন্তু, $AE.EB = CE.ED$, (কল্পনা)

$\therefore \quad CE.EF = CE.ED$

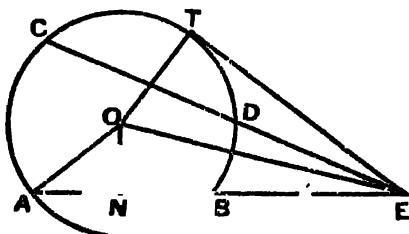
অর্থাৎ, $EF = ED$।

$\therefore$ F ও D বিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিয়া যাইবে।

অর্থাৎ, A, C ও B দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়া যাইবে।

উপপাদ্য ৫৪

কোন বৃত্তের দুই জ্যা বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অন্যটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হইবে ; এবং এই আয়তক্ষেত্রদ্বয়ের প্রত্যেকটি উক্ত বহিঃস্থ বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

[If two chords of a circle, when produced, cut at a point outside it, the rectangle contained by their segments are equal, and each rectangle is equal to the square on the tangent from the point of intersection.]

মনে কর ABC বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় উহার বহিঃস্থ E বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল, এবং ET, বৃত্তের একটি স্পর্শক।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $AE \cdot EB = CE \cdot ED = ET^2$।

মনে কর O, বৃত্তটির কেন্দ্র। O হইতে ABএর উপর ON লম্ব অঙ্কিত কর। OA, OE, OT সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। $AE.EB = (NE+AN).(NE-BN)$

$= (NE+AN)(NE-AN)$

($\because$ ON, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে)

$= NE^2 - AN^2$ (উপ. ৪৯)

$= (NE^2+ON^2)-(AN^2+ON^2)$

$= OE^2 - OA^2 = OE^2 -$ ব্যাসার্দ্ধ^2 ।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে

$CE.ED = OE^2 -$ ব্যাসার্দ্ধ^2 ।

আবার, $\because$ OT ব্যাসার্দ্ধ, ET স্পর্শকের উপর লম্ব,

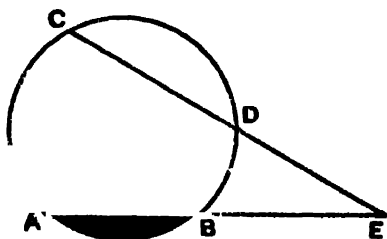
$\therefore$ $ET^2 = OE^2 \quad OT^2 = OE^2 -$ ব্যাসার্দ্ধ^2 (উপ. ২৮)

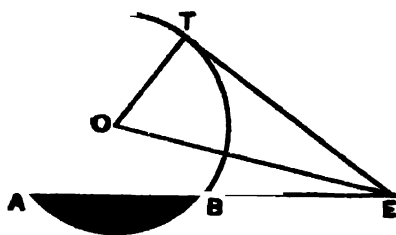
$\therefore$ $AE.EB = CE.ED = ET^2$ । ই. উ. বি.

অনুসিদ্ধান্ত ১। দুইটি সীমাবদ্ধ সরল রেখা বর্দ্ধিত হইয়া পরস্পর ছেদ করিলে যদি একের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ সরল রেখা দুইটির প্রান্তবিন্দুগুলি একবৃত্তস্থ হইবে।

মনে কর AB, CD সরল রেখা দুইটি বর্দ্ধিত হইয়া E বিন্দুতে ছেদ করিল।

যদি $AE.EB = CE.ED$ হয়, তবে A, B, C ও D একই বৃত্তের উপর থাকিবে।

ইহার প্রমাণ ৫৩ উপপাদ্যের ২য় অনুসিদ্ধান্তের প্রমাণের অনুরূপ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। যদি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে এরূপ দুইটি সরল রেখা টানা যায় যাহাদের একটি ঐ বৃত্তকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, এবং অপরটি বৃত্তের সহিত এক বিন্দুতে সংলগ্ন হয়, এবং প্রথমোক্ত সরল রেখার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র শেষোক্ত সবল রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত সরল রেখা ঐ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

মনে কর বৃত্তের বহিঃস্থ E বিন্দু হইতে EA ও ET সরল রেখা টানা হইল, এবং EA, বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল, ও ET, বৃত্তের সহিত T বিন্দুতে সংলগ্ন হইল।

যদি $EA.EB = ET^2$ হয়, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে ET, বৃত্তকে T বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, অর্থাৎ $\angle OTE =$ এক সমকোণ হইবে।

প্রমাণ। কল্পনানুসারে $EA.\ EB = ET^2$।

কিন্তু, $EA\ .\ EB = OE^2 -$ ব্যাসার্দ্ধ^2 (উপ. ৫৪)

$= OE^2 - OT^2$

$\therefore \quad ET^2 = OE^2 - OT^2$।

$\therefore \quad \angle OTE =$ এক সমকোণ; (উপ. ২৯)

অতএব ET, বৃত্তকে T বিন্দুতে স্পর্শ করে।

মন্তব্য। ৫৩ ও ৫৪ উপপাদ্যের সাধারণ নির্ব্বচন যুক্তভাবে এরূপে লেখা যায়:

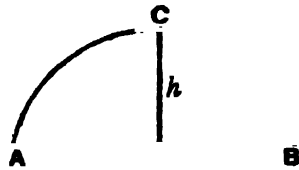
একটি বৃত্তের অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কতকগুলি জ্যা অঙ্কিত করিলে উহাদের প্রত্যেকটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র পরস্পর সমান হইবে।

অনুশীলনী ৫৭

*১। বৃত্তের কোন বিন্দু হইতে একটি ব্যাসের উপর লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে লম্ব দ্বারা বিভক্ত ব্যাসের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র লম্বের উপর বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

*২। AB একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। P হইতে ABএর উপর PN লম্ব অঙ্কিত করা হইল। যদি $AN.\ NB = PN^2$ হয়, প্রমাণ কর যে Pএর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

৩। AB, একটি বৃত্তের জ্যা। AB-জ্যার কোন বিন্দু P হইতে বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত এরূপ এক সরল রেখা PQ টান যেন $PQ^2 = AP.\ PB$ হয়।

*৪। ACB চাপের AB জ্যার দৈর্ঘ্য $2l$; এবং উচ্চতা (জ্যা হইতে চাপের মধ্যবিন্দুর দূরত্ব) h। প্রমাণ কর যে চাপের ব্যাসার্দ্ধ $\frac{l^2+h^2}{2h}$.

৫। PQ ও RS এক বৃত্তের দুই জ্যা। যদি অপর একটি এক-কেন্দ্রীয় বৃত্ত, PQ ও RSকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে $PX.\ XQ = RY.\ YS$।

*৬। ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে AD, BE ও CF লম্ব অঙ্কিত করা হইল। O, লম্ববিন্দু হইলে প্রমাণ কর যে $AO.OD = BO.OE = CO.\ OF$।

[সঙ্কেত: B, C, E ও F একবৃত্তস্থ; আবার C, A, F ও D একবৃত্তস্থ।]

৭। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিল। উহাদের সাধারণ জ্যার যে কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তদ্বয়ের দুইটি জ্যা অঙ্কিত করিলে শেষোক্ত জ্যাদ্বয়ের প্রান্তবিন্দুগুলি এক বৃত্তের উপর থাকিবে।

৮। ৫৪ উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর যে বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের উপব যে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায় উহারা পরস্পর সমান। (ক. প্র., ১৯২৫)

*৯। প্রমাণ কব যে দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের বর্দ্ধিত সাধারণ জ্যাব যে কোন একটি বিন্দু হইতে বৃত্ত দুইটির উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পবস্পর সমান।

*১০। দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহেব উপব কোন একটি বিন্দু P হইতে স্পর্শক অঙ্কিত কবা হইল। যদি স্পর্শকগুলিব দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান হয়, তবে P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*১১। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পব ছেদ কবিল। প্রমাণ কব যে ABকে বর্দ্ধিত করিলে উহা বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শককে সমদ্বিখণ্ডিত কবিবে। (ক. প্র., ১৯১৯)

*১২। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। A হইতে BCএব উপব AN লম্ব টানা হইল।

প্রমাণ কর যে (ক) $AN^2 = BN.\ CN$;
(খ) $AB^2 = BN.\ BC$;
(গ) $CA^2 = CN.\ CB$ ।

[সঙ্কেত: BC বাহুকে ব্যাস করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে (ক) প্রমাণ করা যায। AB ও CA যথাক্রমে $\triangle ACN$ ও $\triangle ABN$ এর পরিবৃত্তদ্বয়ের স্পর্শক ; ইহা দ্বারা (খ) ও (গ) প্রমাণ কর।]

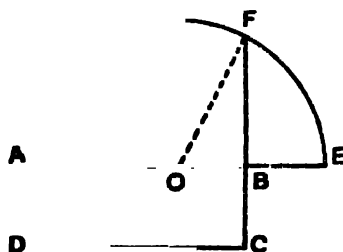
১৩। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর পর পর A, B, C ও D বিন্দু-চতুষ্টয় লওয়া হইল। ঐ সবল রেখাব উপর এরূপ অন্য একটি বিন্দু O নির্দ্দেশ কব যেন $OA.\ OC = OB.\ OD$ হয। (বো. প্র., ১৯১৯)

*১৪। কোন বৃত্তের PQ ও RS জ্যাদ্বয় পরস্পব O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিল। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের দৈর্ঘ্য r হইলে প্রমাণ কর যে

$$OP^2 + OQ^2 + OR^2 + OS^2 = 4r^2 \text{ ।}$$

সম্পাদ্য ৩৫

কোন নির্দ্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান এক বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square equal in area to a given rectangle.]

মনে কর A CD এক নির্দ্দিষ্ট আয়তক্ষেত্র।

ABCDএর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এক বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। ABকে E পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর যেন BE = BC হয়। AEকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর, এবং Oকে কেন্দ্র করিয়া OE ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ইহা যেন বর্দ্ধিত CB বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, BF^2 নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র হইবে।

OF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। ∵ OF, OBF সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ;

∴ $BF^2 = OF^2 - OB^2$

$= OE^2 - OB^2$, (∵ OF = বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ = OE)

$= (OE + OB).(OE - OB)$ (৪৯ উপ.)

$= (AO + OB).BE$, (∵ AO = OE)

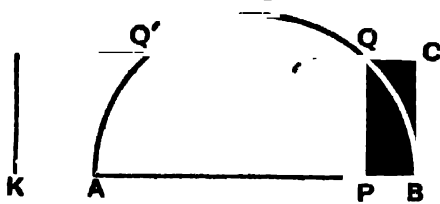
$= AB.BC$। ই. স. বি.

মন্তব্য। এই সম্পাদ্য দ্বারা যে কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

কারণ, (১) যে কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায়, (২০ক সম্পাদ্য); (২) এই ত্রিভুজের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায় (১৮ সম্পাদ্য); (৩) ৩৫ সম্পাদ্য দ্বারা এই আয়তক্ষেত্রের সমান করিয়া একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

সম্পাদ্য ৩৬

এক সরল রেখাকে এরূপে (ক) অন্তর্বিভক্ত; (খ) বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহার অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র একটি নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

[To divide a given straight line (i) internally; (ii) externally, so that the rectangle contained by the segments may be equal in area to a given square.]

(ক) অন্তর্বিভাগ।

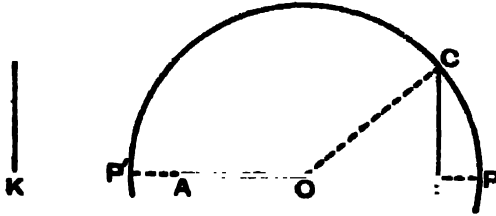
মনে কর K নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু, এবং AB সরল রেখাকে কোন বিন্দু Pতে এইরূপে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন

$AP.\ PB = K^2$ হয়।

অঙ্কন। ABকে ব্যাস করিয়া একটি অর্দ্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। B বিন্দুতে ABএর উপর Kএর সমান করিয়া BC লম্ব টান। এবং C দিয়া ABএর সমান্তরাল CQ সরল রেখা টান। ইহা যেন উক্ত অর্দ্ধবৃত্তকে Q, Q′ বিন্দুতে ছেদ করিল। Q হইতে ABএর উপর QP লম্ব অঙ্কিত কর।

প্রমাণ কর যে $AP.\ PB = PQ^2 = K^2$। [৩৫ সম্পাদ্যের প্রমাণ দেখ]

(খ) বহির্বিভাগ

মনে কর K, নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু; এবং AB সরল রেখাকে P বিন্দুতে এইরূপে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন $PA.\ PB = K^2$ হয়।

অঙ্কন। ABকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। B বিন্দুতে ABএর উপর Kএর সমান BC লম্ব টান। এখন, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OC ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি অর্দ্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর; উহা যেন বর্দ্ধিত ABকে P এবং P' বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে $PA.\ PB = K^2$ হইবে।

প্রমাণ। $PA.\ PB = (OP + OA).\ (OP - OB)$

$= (OP + OB).\ (OP - OB)$, ($\because OA = OB$)

$= OP^2 - OB^2$ (৪৯ উপপাদ্য)

$= OC^2 - OB^2$

$= BC^2$ ($\because \angle OBC =$ সমকোণ)

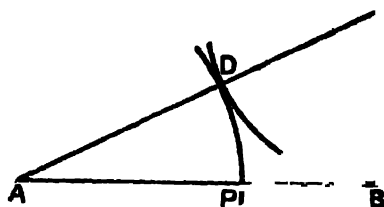
$= K^2$ (অঙ্কন)

ই. স. বি.

সম্পাদ্য ৩৭

একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এরূপ দুইটি অংশে (ক) অন্তর্বিভক্ত; (খ) বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন সমগ্র রেখা ও একটি অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

[To divide a given straight line (i) internally; (ii) externally, so that the rectangle contained by the whole and one part may be equal to the square on the other part.]

(ক) অন্তর্বিভাগ

মনে কর AB একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। ইহাকে কোন বিন্দু Pতে এইরূপে অন্তর্বিভক্ত করিতে হইবে যেন

$AB. BP = AP^2$ হয়।

[**বিশ্লেষণ।** মনে কর $AB = a$ একক; $AP = x$ একক।

তাহা হইলে, $a(a-x) = x^2$; অর্থাৎ, $x^2 + ax = a^2$ হইবে।

$$\therefore \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

অতএব, যদি এরূপ একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায় যাহার সমকোণ-সংলগ্ন বাহু দুইটি a ও $\frac{a}{2}$, তবে ঐ ত্রিভুজের অতিভুজ হইবে $x+\frac{a}{2}$। ইহা হইতে $\frac{a}{2}$ বাদ দিলেই x অর্থাৎ AP পাওয়া যাইবে।]

অঙ্কন। B বিন্দুতে ABএর উপর $\frac{1}{2}$ ABএর সমান করিয়া BC লম্ব অঙ্কিত কর এবং AC সংযুক্ত কর। AC হইতে CBএর সমান করিয়া CD অংশ কাটিয়া লও। এখন, AB হইতে ADএর সমান করিয়া AP অংশ কাটিয়া লও।

তাহা হইলে, $AB.\ BP = AP^2$ হইবে।

প্রমাণ। মনে কর $AB = a$, এবং $AP = x$।

$$CD = BC = \tfrac{1}{2}AB = \frac{a}{2};$$

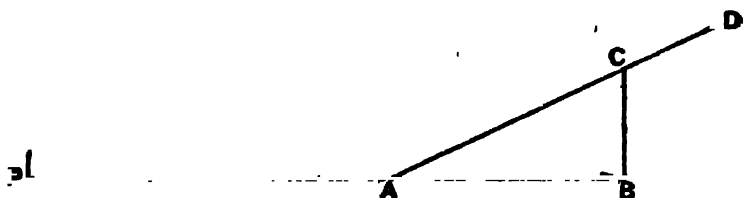
$$\text{এবং } AC = AD + CD = AP + BC = \left(x + \frac{a}{2}\right)।$$

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $AB^2 + BC^2 = AC^2$।

$$\therefore\ a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

অর্থাৎ, $a^2 - ax = x^2$; অর্থাৎ, $a(a - x) = x^2$।

$\therefore\ AB.BP = AP^2$। ই. স. বি.

(খ) বহির্বিভাগ

মনে কর AB সকল রেখাকে P বিন্দুতে এইরূপে বহির্বিভক্ত করিতে হইবে যেন AB. BP = AP^2 হয়।

[**বিশ্লেষণ।** মনে কর AB = a ; AP = x।

তাহা হইলে, $a(a+x) = x^2$ হইবে। অর্থাৎ, $x^2 - ax = a^2$;

$$\therefore \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{।}$$

অতএব, যদি এরূপ একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায় যাহার সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় a ও $\frac{a}{2}$, তাহা হইলে ঐ ত্রিভুজের অতিভুজ হইবে $x - \frac{a}{2}$। ইহার সহিত $\frac{a}{2}$ যোগ করিলে $\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}$ বা x অর্থাৎ AP পাওয়া যাইবে।]

অঙ্কন। B বিন্দুতে ABএর উপর $\frac{1}{2}$ ABএর সমান BC লম্ব অঙ্কিত কর। CA সংযুক্ত কর এবং ACকে D পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন CD = CB হয়। এখন, বর্দ্ধিত BA হইতে ADএর সমান করিয়া AP অংশ কাটিয়া লও। তাহা হইলে AB. BP = AP^2 হইবে।

প্রমাণ। মনে কর AB $= a$ এবং AP $= x$।

$\therefore$ AC $=$ AD $-$ CD $=$ AP $-$ BC $= \left(x - \frac{a}{2}\right)$।

এখন, $\because$ $\triangle$ABCএর $\angle$B $=$ এক সমকোণ ;

$\therefore$ AB^2 + BC^2 = AC^2 ।

$$\therefore \quad a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

অর্থাৎ, $a^2 + ax = x^2$;

অর্থাৎ, $a(a+x) = x^2$,

$\therefore$ AB. BP $=$ AP^2 । ই. স. বি.

মন্তব্য। যদি AB, P বিন্দুতে এরূপে অন্তর্বিভক্ত হয় যে AB.BP $=$ AP^2, তাহা হইলে BP, A বিন্দুতে অনুরূপভাবে বহির্বিভক্ত হইবে।

অনুশীলনী ৫৮

১। জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{21}$ নির্ণয় কর।

[সঙ্কেত : একটি 7 এবং 3 একক সন্নিহিত বাহু বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্রের বাহু $\sqrt{7 \times 3}$ বা $\sqrt{21}$ একক হইবে।]

২। জ্যামিতিক উপায়ে নিম্নলিখিত সমীকরণের মূল নির্ণয় কর :

$$\left.\begin{array}{l} xy = 21 \\ x = y \end{array}\right\}$$

*৩। মূল নির্ণয় কর : (ক) $(a-x)\,x = b^2$; (খ) $10x - x^2 = 16$ ।

[সঙ্কেত : a একক দীর্ঘ একটি সরল রেখাকে এইরূপ দুইভাগে অন্তর্বিভক্ত কর যেন উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, b একক বাহু-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়। (৩৬ সম্পাদ্য (ক) দেখ)]

*৪। মূল নির্ণয় কর : (ক) $(a+x)x=b^2$; (খ) $4x+x^2=12$ ।

[৩৬ সম্পাদ্য (খ) দেখ]

*৫। মূল নির্ণয় কর : (ক) $(a-x)a=x^2$ [৩৭ সম্পাদ্য (ক)]

(খ) $4-2x=x^2$ ।

*৬। মূল নির্ণয় কর : (ক) $(a+x)a=x^2$ [৩৭ সম্পাদ্য (খ)]

(খ) $4+2x=x^2$ ।

৭। AB সরল রেখাকে P বিন্দুতে এরূপে অন্তর্বিভক্ত করা হইল যেন $AB.PB=AP^2$ হয়। প্রমাণ কর যে

$$\frac{AP}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}।$$

৮। AB সরল রেখাকে P বিন্দুতে একপে বহির্বিভক্ত কবা হইল যেন $AB.\ BP=AP^2$ হয়। প্রমাণ কব যে

$$\frac{AP}{AB}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}।$$

*৯। একটি সবল বেথাকে এইরূপ দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত কব যেন উহাদেব অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, দুইটি নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টিব সমান হয়।

*১০। একটি সবল রেখাকে এইরূপ দুই অংশে বহির্বিভক্ত কব যেন উহাদের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, দুইটি নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান হয়।

*১১। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এইরূপ দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত কব যেন উহাদের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়েব সমষ্টি একটি নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রেব সমান হয়।

ইহা দ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণের মূল নির্ণয় কর :

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$$ [৯৩ অনুচ্ছেদ]

*১২। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এইরূপ দুই অংশে অন্তর্বিভক্ত কর যেন উহাদের উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর একটি নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

ইহা দ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণের মূল নির্ণয় কর :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 144 \\ x + y = 18 \end{array}\right\} \qquad (\text{৯২ অনু.})$$

*১৩। ১১ প্রশ্নে সরল রেখাটিকে বহির্বিভক্ত কর এবং জ্যামিতিক উপায়ে নিম্নলিখিত সমীকরণের মূল নির্ণয় কর :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 289 \\ x - y = 7 \end{array}\right\}$$

*১৪। ১২ প্রশ্নে সরল রেখাটিকে বহির্বিভক্ত কর এবং নিম্নলিখিত সমীকরণের মূল নির্ণয় কর :

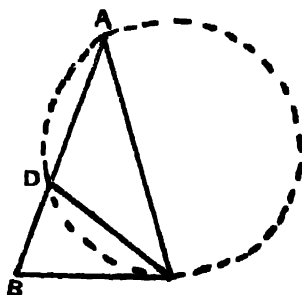
$$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 225 \\ x - y = 9 \end{array}\right\}$$

*১৫। AB সরল রেখা P বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত হইল যেন $AB.\ PB = AP^2$ হয়। প্রমাণ কর যে

$$(AP - PB).\ (AP + PB) = AP.\ PB \text{ ।}$$

সম্পাদ্য ৩৮

একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমি-সংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ।

[To construct an isosceles triangle having each of the angles at the base double of the vertical angle.]

অঙ্কন। যে কোন সরল রেখা AB লও; এবং উহাকে D বিন্দুতে এরূপে অন্তর্বিভক্ত কর যেন AB. BD = AD² হয়। (৩৭ সম্পাদ্য)

এখন, B ও Dকে কেন্দ্র করিয়া ADএর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। ইহারা যেন C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও BC সংযুক্ত কর। তাহা হইলে △ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ। DC সংযুক্ত কর।

∵ DA = DC ; ∴ ∠DCA = ∠DAC ;

এবং ∵ DC = BC , ∴ ∠DBC = ∠BDC = 2∠DAC ;

এখন, ∵ AB. BD = AD² = BC² ; (অঙ্কন)

∴ BC সরল রেখা A, D ও C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। (৫৪ উপপাদ্য ; ২য় অনুসিদ্ধান্ত)

$\therefore$ $\angle BCD$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle DAC$; (৪৫ উপপাদ্য)

$\therefore$ $\angle ACB = \angle BCD + \angle DCA = 2\angle DAC$।

কিন্তু $\angle DBC$ অর্থাৎ $\angle ABC = 2\angle DAC$;

অতএব, $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle BAC$।

$\therefore$ $\triangle ABC$ই নির্ণেয় সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ই. স. বি.

মন্তব্য ১। $\triangle ABC$এর $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$;

অর্থাৎ, $\angle A + 2\angle A + 2\angle A = 180^\circ$;

অর্থাৎ, $5\angle A = 180$; $\therefore$ $\angle A = 180^\circ \div 5 = 36^\circ$।

অতএব, উক্ত অঙ্কন দ্বারা 36° ও 72° কোণ অঙ্কিত করা যায়; কাজেই, 18°, 9°, 27 ইত্যাদি কোণও অঙ্কিত করা যাইবে।

মন্তব্য ২। এই সম্পাদ্য দ্বারা কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি সুষম দশভুজ অঙ্কিত করা যাইবে।

কারণ, বৃত্তের কেন্দ্রে $\frac{360^\circ}{10}$ অর্থাৎ 36° কোণ অঙ্কিত করিলে, যে জ্যার উপর ঐ কোণ দণ্ডায়মান থাকিবে তাহাই নির্ণেয় সুষম দশভুজের এক বাহু হইবে।

অনুশীলনী ৫৯

১। একটি সমকোণকে পাঁচ সমান ভাগে বিভক্ত কর।

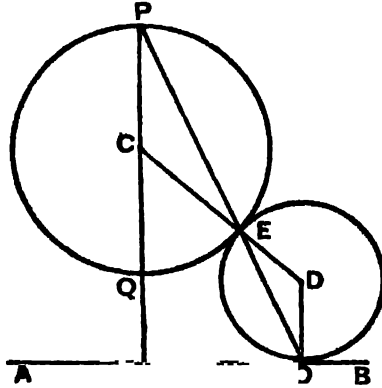
২। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তে একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত: সুষম পঞ্চভুজের প্রত্যেক বাহু কেন্দ্রে ($360^\circ \div 5$) বা 72° কোণ উৎপন্ন করে; ($\because$ সমান সমান জ্যা কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।)]

বৃত্ত অঙ্কন*

(জটিল প্রশ্ন)

১৬১। একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা ABকে একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু Oতে এবং একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

[To draw a circle to touch a given straight line AB at a given point O and also a given circle.]

অঙ্কন। মনে কর AB একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, O উহার একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। এবং C, নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র। O বিন্দুতে ABএর উপর OD লম্ব অঙ্কিত কর। C হইতে ABএর উপর লম্ব টান, ইহা যেন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। OP সংযুক্ত কর। মনে কর OP নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। CE সংযুক্ত কর। ইহা যেন ODকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

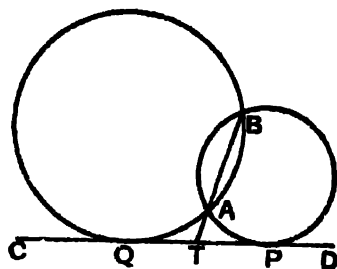
*নিম্নলিখিত অঙ্কনগুলিতে বিশ্লেষণ প্রণালী অবলম্বন করিলে সমাধান সহজ হইবে (৯০ অনুচ্ছেদ দেখ)। এস্থলে শিক্ষার্থিগণ ১৩৬ অনুচ্ছেদ (২৭৮—২৭৯ পৃষ্ঠা) আবার পাঠ করিয়া লইবে।

তাহা হইলে প্রমাণ কর যে D নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র, এবং DO উহার ব্যাসার্দ্ধ হইবে।

মন্তব্য। এই বৃত্তটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিবে। QO সংযুক্ত করিয়া উক্তরূপ অঙ্কন দ্বারা এইরূপ আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় যাহা নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিবে।

১৬২। একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু A ও B দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা CDকে স্পর্শ করিবে।

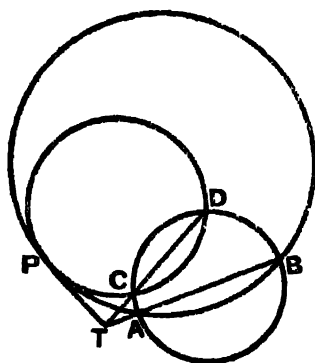
[To draw a circle to pass through two given points A and B and to touch a given straight line CD.]

অঙ্কন। A ও B সংযুক্ত কর। ইহা যেন CDকে T বিন্দুতে ছেদ করিল। CD হইতে এরূপ দুইটি সমান অংশ TP ও TQ কাটিয়া লও যেন $TP^2 = TQ^2 = TA. TB$ হয়। (সম্পাদ্য ৩৫) এখন, A, B ও P দিয়া একটি এবং, A, B ও Q দিয়া অপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

এই বৃত্ত দুইটির প্রত্যেকটি নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। ∵ $TP^2 = TA. TB$, এবং $TQ^2 = TA. TB$,

∴ অঙ্কিত বৃত্তদ্বয় CDকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। (৫৪ উপপাদ্য, অনুসিদ্ধান্ত ২)

১৬৩। একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু A ও B দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

[To draw a circle to pass through two given points A and B and to touch a given circle.]

অঙ্কন। A ও B দিয়া যে কোন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ইহা যেন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD সংযুক্ত কর। মনে কর BA ও DC বর্দ্ধিত হইয়া T বিন্দুতে ছেদ করিল। T বিন্দু হইতে নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর স্পর্শক TP অঙ্কিত কর। এখন, A, B ও P দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, ইহা একটি নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ। TP সংযুক্ত কর।

∵ TP নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে,

∴ $TP^2 = TC.TD$ (৫৪ উপপাদ্য)

কিন্তু, ∵ CD ও AB, ABDC বৃত্তের দুইটি জ্যা ও উহারা পরস্পর T বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,

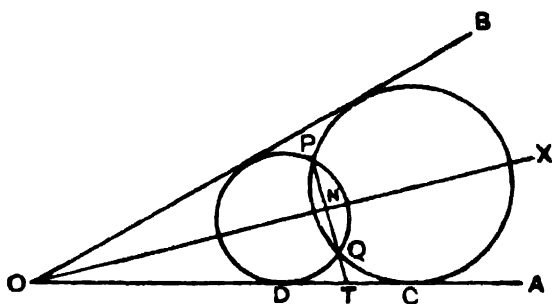
∴ $TC.TD = TA.TB$ (৫৪ উপ.)

∴ $TP^2 = TA.TB$

অতএব TP সরল রেখা A, B ও P দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। অর্থাৎ, TP, এই বৃত্ত এবং নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত উভয়ের একটি সাধারণ স্পর্শক; অর্থাৎ, এই বৃত্ত নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

মন্তব্য। T হইতে নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর সাধারণতঃ দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়; সুতরাং, সাধারণতঃ এইরূপ দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইবে।

১৬৪। একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা OA এবং OBকে স্পর্শ করিবে, এবং একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু P দিয়া যাইবে।

[To draw a circle to touch two given straight lines OA and OB and to pass through a given point P.]

অঙ্কন। ∠AOBকে OX দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। P হইতে OXএর উপর PN লম্ব টান, এবং PNকে Q পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন NQ = PN হয়। মনে কর বর্দ্ধিত PQ, OAকে T বিন্দুতে ছেদ করিল। OA হইতে এরূপ দুইটি অংশ TC ও TD কাটিয়া লও যেন $TC^2 = TD^2 = TQ.TP$ হয়। এখন P, Q, C কিংবা P, Q, D দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে প্রমাণ কর যে এই বৃত্তদ্বয়ের প্রত্যেকটি নির্ণেয় বৃত্ত হইবে।

অনুশীলনী ৬০

এইরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর

*১। যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

*২। যাহার ব্যাসার্দ্ধ একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান এবং যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে।

*৩। যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং যাহার ব্যাসার্দ্ধ একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান।

*৪। যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা এবং একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং যাহার ব্যাসার্দ্ধ একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান।

*৫। যাহার কেন্দ্র একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখায় অবস্থিত এবং যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে ও একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে। (৩০ উপ., মন্তব্য)

*৬। যাহার কেন্দ্র একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখায় অবস্থিত এবং যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে ও একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

*৭। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্দ্দেশ কর, দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে যাহার দূরত্বের সমষ্টি একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান।

[মনে কর A ও B, দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, CD, নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা; এবং x, নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্য। Aকে কেন্দ্র করিয়া x ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। B হইতে CDএর উপর BN লম্ব অঙ্কিত কর এবং BNকে E পর্য্যন্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর যেন NE = BN হয়। এখন এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা B ও E বিন্দু দিয়া যাইবে এবং প্রথমোক্ত বৃত্তকে স্পর্শ করিবে (১৬৩ অনু.)। মনে কর P স্পর্শবিন্দু। AP সংযুক্ত কর; ইহা যেন CDকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে প্রমাণ কর যে C ই নির্ণেয় বিন্দু হইবে।]

*৮। এক ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি ও ভূমি দেওয়া আছে, যদি উহার শীর্ষ একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখায় থাকে, তাহা হইলে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত: অঙ্কন ৭ম প্রশ্নের অনুরূপ।]

*৯। এক ত্রিভুজেব দুই বাহুব সমষ্টি, ভূমি এবং উচ্চতা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[সঙ্কেত: মনে কব AB সবল বেখা, ভূমি, x, নির্দ্দিষ্ট দুই বাহুব সমষ্টি, ও p, উচ্চতা। AB হইতে p দূবে ভূমির সমান্তরাল কবিষা CD সবল রেখা টান। অঙ্কনের পরবর্ত্তী অংশ ৭ম প্রশ্নের অনুরূপ।]

*১০। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল বেখাব উপব এরূপ এক বিন্দু নির্দ্দেশ কব, দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে যাহাব দূবত্বেব অন্তব একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যেব সমান হইবে।

[সঙ্কেত: মনে কব A ও B, দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, এবং CD, নির্দ্দিষ্ট সবল বেখা; এবং x, নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্য। Aকে কেন্দ্র কবিযা x এব সমান ব্যাসার্দ্ধ লইযা একটি বৃত্ত অঙ্কিত কব। B হইতে CDএব উপব BN লম্ব অঙ্কিত কব। পববর্ত্তী অঙ্কন ৭ম প্রশ্নেব অনুরূপ, তবে এস্থলে B ও E বিন্দু দিযা অঙ্কিত বৃত্ত পূর্ব্বোক্ত বৃত্তকে P বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ কবিবে। বর্দ্ধিত AP, CDকে C বিন্দুতে ছেদ কবিলে Cই নির্ণেয় বিন্দু হইবে।]

*১১। এক ত্রিভুজেব দুই বাহুব অন্তরফল ও ভূমি দেওয়া আছে। [illegible]
কব। [১০ম প্রশ্ন দেখ।]

*১২। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কব যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট সবল বেখা ও একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

[মনে কব A, নির্দ্দিষ্ট বৃত্তেব কেন্দ্র; এবং r, উহাব ব্যাসার্দ্ধ। নির্দ্দিষ্ট সরল বেখা দুইটির সমান্তবাল কবিযা উহাদের বাহিবের দিকে r দূবে অপব দুইটি সরল বেখা অঙ্কিত কর। এখন, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কব যাহা A বিন্দু দিয়া যাইবে এবং যাহা শেষোক্ত সবল বেখা দুইটিকে স্পর্শ করিবে (১৬৪ অনু.); এই বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণেয় বৃত্তেব কেন্দ্র হইবে।]

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর

*১৩। যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে এবং একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে ও একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

*১৪। যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে ও একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

*১৫। যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত ও একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে।

*১৬। যাহা তিনটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

অনুশীলনী ৬১

(বিবিধ প্রশ্ন)

১। যদি কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র-সংযোজক সরল রেখা ত্রিভুজের এক শীর্ষ দিয়া যায়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

২। যদি কোন ত্রিভুজে অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র একই বিন্দুতে মিলিত হয় তবে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

৩। নির্দ্দিষ্ট ব্যাসার্দ্ধবিশিষ্ট এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে ও এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করিবে।

৪। কোন ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৫। প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখাদ্বয় ও কর্ণদুইটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখা সমবিন্দু।

৬। কতকগুলি ত্রিভুজ একই ভূমির উপর অবস্থিত আছে। উহাদের প্রত্যেকের অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি পরস্পর সমান হইলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজগুলির শীর্ষ একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের উপর থাকিবে।

৭। কতকগুলি ত্রিভুজ একই ভূমির উপর অবস্থিত আছে। উহাদের প্রত্যেকের অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর পরস্পর সমান হইলে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজগুলির শীর্ষ একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর থাকিবে।

৮। এপলোনিয়সের উপপাদ্য (৫২ উপপাদ্য) দ্বারা প্রমাণ কর যে সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ উহার উপর অঙ্কিত মধ্যমার দ্বিগুণ।

৯। ভূমির উপর 25 ফুট ব্যবধানে লম্বভাবে দণ্ডায়মান দুইটি খুঁটির উচ্চতা যথাক্রমে 80 ফুট ও 100 ফুট। উহাদের শীর্ষদ্বয়ের দূরত্ব কত?

১০। দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের একটির যে কোন বিন্দুর সহিত অপরটির যে কোন ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরল রেখা দুইটির উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি সর্ব্বদা সমান থাকিবে।

১১। একটি নির্দ্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান এরূপ একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু নির্দ্দিষ্ট আছে।

১২। ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ও DC বাহুদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2+2\ AB.\ CD\ ।$$

১৩। ABCD এক সামান্তরিক। উহার কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে AOB, COD ত্রিভুজের পরিবৃত্তদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

১৪। a ফুট উচ্চ মন্দিরের চূড়ায় b ফুট উচ্চ একটি মূর্ত্তি স্থাপিত হইল। ভূমির কোন্ বিন্দু হইতে ঐ মূর্ত্তি বৃহত্তম দেখাইবে?

[সঙ্কেত : ভূমির যে বিন্দুতে মূর্ত্তি বৃহত্তম কোণ উৎপন্ন করিবে উহাই নির্ণেয় বিন্দু। মূর্ত্তিটির পদ ও শীর্ষ দিয়া এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা ভূমিকে স্পর্শ করিবে। প্রমাণ কর যে স্পর্শবিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু।]

১৫। প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের মধ্যে ঐ ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু হইতে বৃহত্তর কোন সরল রেখা অঙ্কিত করা যাইতে পারে না।

১৬। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC। যদি ACএব উপর AE লম্ব টানা যায়, তবে প্রমাণ কব যে $BC^2 = 2\ AC.\ CE$।

১৭। একটি বৃত্তের AB জ্যাব উপব এমন একটি বিন্দু P লওযা হইল যেন AP = 2 PB হয়। O, বৃত্তেব কেন্দ্র, r, বৃত্তেব ব্যাসার্দ্ধ; এবং $OP = \frac{r}{\sqrt{3}}$ হইলে ABএর দৈর্ঘ্য নির্ণয কর। (বো. প্র., ১৯৩৪)

১৮। ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। ACএব উপব BD লম্ব টানা হইল। ACএর উপব এরূপ একটি বিন্দু E লওযা হইল যেন $\angle EBC = \angle ECB$ হয। প্রমাণ কব যে

$$BC^2 \sim AB^2 = 2\ DE.\ AC\text{।}$$ (বো. প্র., ১৯৩৩)

১৯। ABC একটি ত্রিভুজ, এবং x, y, z তিনটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। $\triangle$ABCএব সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কব যাহাব শীর্ষ যথাক্রমে x, y, zএব উপব অবস্থিত থাকিবে।

২০। দুইটি ছেদকাবী সবল রেখা হইতে একটি চলবিন্দুব দূবত্বেব সমষ্টি সর্ব্বদা সমান থাকিলে, প্রমাণ কব যে ঐ বিন্দুব সঞ্চাবপথ একটি আযতক্ষেত্র হইবে।

২১। দুইটি বৃত্ত পবস্পব A ও B বিন্দুতে ছেদ কবিল। এই বৃত্তদ্বযেব একটিব উপব যে কোন বিন্দু P লওয়া হইল। যদি PA ও PB (কিংবা বর্দ্ধিত PA ও PB) অপব বৃত্তকে Q ও R বিন্দুতে ছেদ কবে, প্রমাণ কব যে

(ক) QRএর দৈর্ঘ্য P বিন্দুব সর্ব্বাবস্থানে সমান থাকিবে,

(খ) PQR ত্রিভুজের পবিবৃত্তেব ব্যাসার্দ্ধ P বিন্দুব সর্ব্বাবস্থানে সমান থাকিবে,

(গ) PQR ত্রিভুজেব পরিকেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

২২। একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং প্রত্যেক বাহুর এক একটি বিন্দু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

২৩। OX, OY দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। A, $\angle XOY$এর দ্বিখণ্ডকের একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। O এবং A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে কোন বৃত্ত OX এবং OYকে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে $OP+OQ$ অপরিবর্ত্তিত থাকিবে।

২৪। ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। যদি P এরূপ একটি বিন্দু হয় যেন APB ও CPD বৃত্তদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহা হইলে Pএর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

২৫। একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা হইতে কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের দূরত্ব ঐ সরল রেখা হইতে উক্ত ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের দূরত্বের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ হইবে।

২৬। প্রমাণ কর যে n বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজের বহিঃস্থ একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা হইতে শীর্ষগুলির দূরত্বের সমষ্টি উহার অন্তঃকেন্দ্রের দূরত্বের n গুণ হইবে।

২৭। একটি বৃত্ত দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের পরিধিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ কর যে প্রথমোক্ত বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি সরল রেখা হইবে।

২৮। দুইটি চলবিন্দু P ও Q দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা OX এবং OYএর উপর এরূপভাবে অবস্থিত আছে যেন $OP+PQ+QO$ একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান। প্রমাণ কর যে PQ একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২৯। ABC ত্রিভুজের ভূমি BC, P বিন্দুতে এরূপে অন্তর্বিভক্ত হইল যে $m . BP = n . PC$ হয়। প্রমাণ কর যে

(ক) $m\,AB^2 + n\,AC^2 = m\,BP^2 + n\,PC^2 + (m+n)\,AP^2$।

(খ) G, $\triangle ABC$এর ভরকেন্দ্র ; এবং P, যে কোন বিন্দু হইলে
$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3\ PG^2$ ।

৩০। P বিন্দু হইতে তিনটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখার উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি সর্ব্বদা সমান হইলে প্রমাণ কর যে P বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

দেখাও যে নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর সংখ্যা n হইলেও উক্ত সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

৩১। কোন বিন্দু P হইতে একটি আয়তক্ষেত্রের বাহুর উপর লম্ব অঙ্কিত করা হইল। যদি লম্ব চারিটির বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি সর্ব্বদা সমান থাকে, প্রমাণ কর যে Pএর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

৩২। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। উহার BC, CA ও AB বাহুকে যথাক্রমে A′, B′, C′ পর্য্যন্ত সমপরিমাণে বর্দ্ধিত করা হইল; প্রমাণ কর যে $\triangle A'B'C'$ও সমবাহু হইবে।

৩৩। ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর উপর A, B ও Cএর বিপরীত পার্শ্বে যথাক্রমে A′BC, B′CA ও C′AB সমবাহু ত্রিভুজত্রয় অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে

(ক) $AA'=BB'=CC'$;

(খ) AA′, BB′ ও CC′ সমবিন্দু।

৩৪। কোন ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে এই সমবাহু ত্রিভুজ তিনটির অন্তঃকেন্দ্রত্রয় সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় উহাও সমবাহু হইবে।

৩৫। ১৫০ অনুচ্ছেদে প্রমাণ কর যে ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত H_1, H_2 ও H_3কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৩৬। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের বাহুদ্বয় দুইটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। যদি ত্রিভুজের শিরঃকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি একটি নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির প্রত্যেকটির সঞ্চারপথ একটি সরল রেখা হইবে :

(ক) ভূমির মধ্যবিন্দু ; (খ) ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র, (গ) ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ; (ঘ) ত্রিভুজের লম্ববিন্দু, (ঙ) ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

৩৭। O, একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু ; এবং AB, একটি নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা। O হইতে AB সরল রেখার যে কোন বিন্দু P পর্য্যন্ত একটি সরল রেখা টানা হইল। যদি OPকে Q বিন্দুতে এইরূপে বিভক্ত করা হয় যেন OP. OQ, P বিন্দুর সর্ব্বাবস্থানে সমান থাকে, প্রমাণ কর যে Qএর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

৩৮। ABC ত্রিভুজের $BC^2 = CA^2 + AB^2 + CA.\,AB$।

প্রমাণ কর যে $\angle A$, $(\angle B + \angle C)$ এর দ্বিগুণ।

৩৯। কোন বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P হইতে ঐ বৃত্তের উপর একটি ছেদক PQR ও স্পর্শক PT টানা হইল। যদি ঐ ছেদক বৃত্তকে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে এবং $\angle QPT$ = এক সমকোণ হয়, প্রমাণ কর যে

$$PQ^2 + PR^2 + 2\ PT^2 = 4.\ \text{ব্যাসার্দ্ধ}^2\ ।$$

৪০। কোন বৃত্তে ABC ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করা হইল। যদি A বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল কোন সরল রেখা ত্রিভুজের AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে B, C, D, E একবৃত্তস্থ হইবে।

৪১। কোন অর্দ্ধবৃত্তের অন্তর্লিখিত একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। প্রমাণ কর এই বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃত্তের অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের $\frac{2}{5}$।

৪২। P, একটি নির্দ্দিষ্ট চাপ ABএব যে কোন একটি বিন্দু। A হইতে $\angle$APBএর দ্বিখণ্ডকের উপর AX লম্ব অঙ্কিত করা হইল। Xএর সঞ্চারপথ নির্ণয় কব।

৪৩। কোন বৃত্তে ABC সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত করা হইল। P, বৃত্তের যে কোন বিন্দু হইলে প্রমাণ কব যে PA, PB ও PCএর বৃহত্তমটি অন্য দুইটিব সমষ্টিব সমান হইবে।

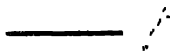
৪৪। কোন সবল বেখায় পর পর A, B, C ও D, এই বিন্দু চারিটি লওয়া হইল। প্রমাণ কর যে

(ক) $AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2\,AD.\,BC$;

(খ) $AD^2=AB^2+BC^2+CD^2+2\,AB.\,BC$
$+2\,BC.\,CD+2\,CD.\,AB.$

৪৫। R ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট কোন বৃত্তেব অন্তর্লিখিত একটি সুষম পঞ্চভুজ অঙ্কিত কব। যদি X ও Y যথাক্রমে সুষম পঞ্চভুজেব বাহু ও কর্ণ হয়, প্রমাণ কব যে

(ক) $X^2=Y.(Y-X)$,

(খ) $X=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী ১ (১৪—১৫ পৃষ্ঠা)

৩। AB সরল রেখার দৈর্ঘ্য   ৮। 360°

৯। সূক্ষ্ম ; সূক্ষ্ম , স্থুল ; সূক্ষ্ম , প্রবৃদ্ধ , প্রবৃদ্ধ : সূক্ষ্ম

১০। (ক) 90° , (খ) 180° , (গ) 120° ।

অনুশীলনী ২ (২৫ পৃষ্ঠা)

১। (ক) 45° , (খ) 30° ; (গ) 15° , (ঘ) 0°

২। (ক) 60° , (খ) 30° , (গ) 50° , (ঘ) 90°

৩। 150° ; 30°

৬। (ক) 150° , 30°, 150° , (খ) 135°, 45°, 135° ,
(গ) 120°, 60°, 120° ৭। 70° ৮। 155°

৯। 45°, 30°, 60°, $71^\circ 36'$, $57^\circ 11' 57''$, $39^\circ 30' 23''$

১০। 150°, 135°, 60°, 15°, 30°, $77^\circ 22' 15''$, $41^\circ 59' 3''$

১১। 36°, 144° ১২। 15°, 75°

অনুশীলনী ৪ (৩০ পৃষ্ঠা)

২। 150°, 30°, 150° ৩। 75°, 105°, 75°

৪। 50°, 130° 50°, 130° ৫। 120° , 60° , 120°, 60°

অনুশীলনী ১৪ (৭৬—৭৭ পৃষ্ঠা)

৭। (ক) 90° , (খ) 45° ; (গ) 90° , (ঘ) $90^\circ 55'$

৮। 48° ৯। 72°, 60°, 48° ১০। 108°

অনুশীলনী ১৫ (৮২ পৃষ্ঠা)

১। (ক) 6 সমকোণ , (খ) 10 সমকোণ ; (গ) 32 সমকোণ

২। (ক) 8 , (খ) 7 ; (গ) 6   ৩। চতুর্ভুজ

৪। 120° , 135° ; $147\frac{3}{11}$ ডিগ্রী ; 156° ; 160°

৫। (ক) 20 ; (খ) 8 , (গ) 6 ; (ঘ) 5

৬। (ক) 6 , (খ) 5 , (গ) 20 ; (ঘ) 12

৭। 20-বাহু   ৮। 12   ৯। 10

অনুশীলনী ১৬ (৯৮-৯৯ পৃষ্ঠা)

১৭। 416 গজ (প্রায়)

১৮। উচ্চতা = 1990 গজ (প্রায়) = প্রথম স্থান হইতে দূরত্ব।

অনুশীলনী ১৯ (১২০-২১ পৃষ্ঠা)

৯। 2·5 সে. মি. ১০। 1"

অনুশীলনী ২৭ (১৬০-৬১ পৃষ্ঠা)

১। ভূমির মধ্যবিন্দুতে উহার উপর লম্ব।

২। বিন্দু দুইটির যোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুতে ঐ সরল রেখার উপর লম্ব।

৩। নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর লম্ব টান। এই লম্বের মধ্যবিন্দু দিয়া নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তরাল রেখাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

৪। ভূমির এক প্রান্তকে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রদত্ত বাহুর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত।

৫। প্রদত্ত বিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্র-সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের অর্দ্ধেক ব্যাসার্দ্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত।

৬। অতিভুজকে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত।

৭। Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং $\frac{1}{2}$ PQ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত কর। এই বৃত্তের পরিধির যে অংশ OA এবং OB সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত উহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

৮। একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু চতুষ্টয় (নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাদ্বয় যাহার কর্ণ; এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য, প্রদত্ত দূরত্ব-সমষ্টির দ্বিগুণ)।

অনুশীলনী ২৮ (১৬৭-৭৪ পৃষ্ঠা)

২১। 316 ফুট ৩১। 12

৪৮। $\triangle$EDCএর বাহু তিনটির লম্ব-দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু বলিয়া উহারা O বিন্দুতে মিলিত হইবে। কিন্তু $\because$ AD = AE ; $\therefore$ EDএর লম্ব-দ্বিখণ্ডক A বিন্দু দিয়া যাইবে ; অর্থাৎ প্রকৃত পক্ষে OA বাহু বর্দ্ধিত হইলে উহা ED কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে, প্রদত্ত চিত্রে যাহা অসম্ভব ; সুতরাং চিত্রের অঙ্কন ভুল।

অনুশীলনী ২৯ (১৭৭ পৃষ্ঠা)

১। 15 বর্গ ইঞ্চি ২। 15 বর্গ ইঞ্চি ৩। 60 বর্গ ইঞ্চি
৪। 116·83 বর্গ সে. মি. ৫। 2388·41 বর্গ সে. মি.
৬। 517·5 বর্গ গজ ৭। 3 ইঞ্চি ৮। 5 সে. মি.
৯। (ক) 4 বর্গ গজ, (খ) 25 বর্গ ফুট; (গ) 36 বর্গ ইঞ্চি;
(ঘ) 30·25 বর্গ সে. মি.
১০। (ক) 5 ইঞ্চি, (খ) 1·2 সে. মি.; (গ) 8·33 গজ (প্রায়),
(ঘ) 9·98 ফুট ১১। 50 গজ ১২। 820 বর্গ ফুট

অনুশীলনী ৩০ (১৮১-৮২ পৃষ্ঠা)

১। (ক) 15 বর্গ ইঞ্চি, (খ) 75 বর্গ সে. মি.,
(গ) 199·32 বর্গ ইঞ্চি, (ঘ) 362·5528 বর্গ সে. মি.
২। $8\frac{13}{17}$ ইঞ্চি ৩। $8\frac{33}{56}$ সে. মি.

অনুশীলনী ৩১ (১৮৭-৯০ পৃষ্ঠা)

১। (ক) 3 বর্গ ইঞ্চি; (খ) 4·9 বর্গ সে. মি., (গ) 13·35 বর্গ ইঞ্চি
২। 6 ইঞ্চি ৩। $8\frac{2}{11}$ সে. মি.
৬। BC হইতে 3 সে. মি. দূরে BCএর উভয় পার্শ্বস্থ সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়।
১৩। BCএর মধ্যবিন্দু ও A দিয়া অঙ্কিত সরল রেখা।
২৫। ভূমির সমান্তরাল সরল রেখা।
২৬। D দিয়া অঙ্কিত BCএর সমান্তরাল সরল রেখা।

অনুশীলনী ৩২ (১৯৪-৯৫ পৃষ্ঠা)

১। (ক) 160 বর্গ গজ, (খ) 141 বর্গ সে. মি., (গ) 155·43 বর্গ ইঞ্চি
২। (ক) 90 বর্গ ইঞ্চি, (খ) 75 বর্গ সে. মি.; (গ) 208·38 বর্গ গজ
৩। (ক) 750 বর্গ ইঞ্চি, (খ) 1782·1 বর্গ সে. মি.; (গ) 8208 বর্গ গজ
৪। 32 গজ ৫। 32 ফুট ৬। 30·25 ইঞ্চি
৭। 2275 বর্গ গজ ৮। 2500 বর্গমিটর
৯। 4465 বর্গ গজ ১০। 4553·5 বর্গ লিঙ্ক

অনুশীলনী ৩৫ (২১৫-১৬ পৃষ্ঠা)

১। (ক) 96 বর্গ ইঞ্চি ; (খ) 13·5 বর্গ ইঞ্চি ; (গ) 5·04 বর্গ সে. মি. ;
(ঘ) 12838·5 বর্গ সে. মি. (প্রায়) ২। $18\frac{6}{13}$ ইঞ্চি
৪। (ক) 25 সে. মি. ; (খ) 32·5″ ; (গ) 30″
৫। (ক) 60″ , (খ) 72·36″ (প্রায) ; (গ), 97·3 সে. মি. (প্রায)
৬। 20 ফুট ৭। 29 মাইল ১০। 13″

অনুশীলনী ৩৬ (২১৭-২১ পৃষ্ঠা)

১। 6 সে. মি. ১১। একটি সবল বেখা, যাহা ভূমির সমান্তরাল, এবং ভূমি হইতে যাহাব দূবত্ব ত্রিভুজেব উচ্চতাব এক-তৃতীযাংশের সমান।
২৯। ভবকেন্দ্র ৩১। $3\frac{3}{4}$ হাত

অনুশীলনী ৩৭ (২২৬ পৃষ্ঠা)

৫। ব্যাস

অনুশীলনী ৩৯ (২৩৩ পৃষ্ঠা)

১। প্রদত্ত বৃত্তেব এককেন্দ্রীয় বৃত্ত

অনুশীলনী ৪০ (২৩৫ পৃষ্ঠা)

৪। ব্যাসার্দ্ধ = 5·2″ , জ্যাদ্বযেব দূবত্ব যথাক্রমে 1·8″ ও 2″

অনুশীলনী ৪১ (২৪০-৪১ পৃষ্ঠা)

৫। ভূমিব উপব অঙ্কিত চাপ যাহাব অন্তর্গত কোণ নির্দ্দিষ্ট কোণেব সমান।

৭। PM জ্যাব উপব অঙ্কিত চাপ যাহাব অন্তর্গত কোণ $90^\circ + \frac{\angle PLM}{2}$

৯। কেন্দ্র ও নির্দ্দিষ্ট বিন্দুর যোজক সবল বেখাকে ব্যাস কবিয়া অঙ্কিত বৃত্তের যে অংশ নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অভ্যন্তরে থাকিবে।

১১। BCএর উপর অঙ্কিত চাপ যাহার অন্তর্গত কোণ $\frac{1}{2}\angle APB$।

অনুশীলনী ৪৩ (২৪৭ পৃষ্ঠা)

৮। নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরল রেখাকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত।

অনুশীলনী ৪৪ (২৫৪-৫৫ পৃষ্ঠা)

৪। 45° ৬। ABকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত

৭। AB জ্যা দ্বাবা উৎপন্ন চাপ দুইটিব মধ্যবিন্দু

১২। ∠Aএব দ্বিখণ্ডক ও BCএব লম্ব-দ্বিখণ্ডক ΔABCএর পবিবৃত্তেব উপর মিলিত হইবে, সুতবাং অঙ্কন ভুল।

অনুশীলনী ৪৫ (২৫৯-৬০ পৃষ্ঠা)

৭। দুইটি।

৯। নির্দিষ্ট বিন্দুতে নির্দিষ্ট সবল বেখাব উপব অঙ্কিত লম্ব।

১০। নির্দিষ্ট বৃত্তেব এককেন্দ্রীয় বৃত্ত।

অনুশীলনী ৪৭ (২৬৪-৬৫ পৃষ্ঠা)

২। স্থির বৃত্তেব এককেন্দ্রীয় এবং $(a + x)$ ফুট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত।

৩। স্থির বৃত্তেব এককেন্দ্রীয় এবং $(a - x)$ ফুট ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত।

৫। দুইটি। ৬। $a + x$; $x + x$; $x + a$ ৭। দুইটি।

অনুশীলনী ৪৯ (২৭১-৭৪ পৃষ্ঠা)

৬। PQ = AB ; সুতবাং, সঞ্চাবপথ নির্দিষ্ট বৃত্তেব এককেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত হইবে।

২৩। নির্দিষ্ট বিন্দু ও কেন্দ্র-সংযোজক সবল বেখাকে ব্যাস কবিয়া অঙ্কিত বৃত্ত।

অনুশীলনী ৫০ (২৮২-৮৩ পৃষ্ঠা)

১। (খ) $3.5''$ (প্রায)

২। দুইটি ; চাবিটি কিংবা একটিও না। একটি বৃত্ত অন্যটির ভিতবে থাকিলে কোন স্পর্শক অঙ্কিত কবা যায় না।

৩। (ক) তিনটি, (খ) একটি।

অনুশীলনী ৫২ (২৯৫-৯৬ পৃষ্ঠা)

২। ·6" (প্রায) ৮। $12\sqrt{3}$ বর্গ ইঞ্চি, $48\sqrt{3}$ বর্গ ইঞ্চি।

অনুশীলনী ৫৪ (৩২২-২৪ পৃষ্ঠা)

৩। ভূমির মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র কবিযা ও পবিবৃত্তেব সমান ব্যাসার্দ্ধ লইযা অঙ্কিত বৃত্ত।

৪। ১৫০ অনুচ্ছেদের চিত্রে, BC বাহু এবং $\angle A$ দেওযা থাকিলে $\angle BI_1C = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, এবং $\angle BI_2C = \angle BI_3C = \frac{\angle A}{2}$;

সুতবাং, BCএর উপব অঙ্কিত চাপ নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।

অনুশীলনী ৫৬ (৩৪৫-৪৬ পৃষ্ঠা)

৫। 7 সে. মি. বাহুর উপর 12 এবং 16 সে. মি. বাহুব লম্ব-অভিক্ষেপ যথাক্রমে 4·5 সে. মি. ও 11·5 সে. মি., ইত্যাদি।

১২। AB সবল বেখাব মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র কবিযা অঙ্কিত বৃত্ত।

অনুশীলনী ৫৭ (৩৫৩ পৃষ্ঠা)

১০। নির্দ্দিষ্ট বিন্দুদ্বয সংযোজক সবল বেখাব বর্দ্ধিতাংশ।

অনুশীলনী ৫৮ (৩৬১-৬১ পৃষ্ঠা)

২। $x = y = \sqrt{21}$ ৩। (খ) 2,8

৪। 2 ৫। $\sqrt{5}-1$ ৬। $\sqrt{5}+1$

১১। $\left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = 3 \end{matrix}\right\}$ অথবা, $\left.\begin{matrix} x = 3 \\ y = 4 \end{matrix}\right\}$ ১২। $\left.\begin{matrix} x = 13 \\ y = 5 \end{matrix}\right\}$

১৩। $\left.\begin{matrix} x = 15 \\ y = 8 \end{matrix}\right\}$ ১৪। $\left.\begin{matrix} x = 17 \\ y = 8 \end{matrix}\right\}$

অনুশীলনী ৬১ (৩৭২-৭৮ পৃষ্ঠা)

৯। $\sqrt{1025}$ ফুট ১৭। $\sqrt{3}r$

৪২। Q, প্রতিযোগী চাপেব মধ্যবিন্দু হইলে, AQকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত অর্দ্ধবৃত্ত।

CALCUTTA
UNIVERSITY MATRICULATION PAPERS

COMPULSORY PAPER

1929

1. *Either*, (i) Prove that if two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal.

(ii) Two straight lines AB and CD intersect at E. If the bisector of the angle AEC be produced, prove that it will bisect the angle BED.

Or, (i) Prove that two triangles are equal in every respect, if two angles and the adjacent side of one triangle are respectively equal to two angles and the adjacent side of the other.

(ii) The triangle ABC has the angles at B and C equal. Prove that the bisectors of these equal angles terminated by the opposite sides are equal.

2. (i) Prove that if two tangents are drawn to a circle from an external point, they are equal.

(ii) If the circumference of a circle is divided into three equal arcs, the tangents drawn to the circle at the points of section form an equilateral triangle.

3. Draw a tangent to a given circle from an external point. (Traces of construction must be given, but no justification is required.)

1930

1. *Either*, (i) Prove that the three angles of a triangle are together equal to two right angles.

(ii) Find in *degrees* each angle of a regular polygon of five sides. Give reasons for your answer.

Or, (i) Prove that the area of a triangle is half the area of a parallelogram on the same base and of the same altitude.

(ii) ABCD is any parallelogram and O is any point within it. Show that the sum of the areas of the triangles AOB and COD is half of the area of the parallelogram.

2. *Either*, (i) Establish geometrically the algebraical formula

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

(ii) In a triangle ABC, AD is the perpendicular drawn to the base BC and O is the middle point of BC. Prove that the difference

$$AB^2 \sim AC^2 = 2BC.OD.$$

Or, (i) Prove that the tangent at any point of a circle is at right angles to the radius drawn through the point.

(ii) The radius of a given circle is 1·5 inches. Prove that all points from which the tangents drawn to the circle are of constant length 2 inches, lie on a circle. Draw a diagram as accurately as you can.

3 Construct a triangle whose base will be 6 centimetres and the other two sides 3 and 5 centimetres respectively. Measure as accurately as possible the altitude of the triangle.

[*Traces and statement of construction are required.*]

1931

1. *Either*, (i) If two angles of one triangle are respectively equal to two angles of another, and the side adjacent to the angles in one equal to the side adjacent to the equal angles in the other, prove that the two triangles are equal in all respects.

Or, (i) Prove that any two sides of a triangle are together greater than the third side.

(ii) Prove that the difference of any two sides of a triangle is less than the third side.

2, *Either*, (i) Prove the geometrical proposition corresponding to the algebraical formula $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

(ii) Prove that the square on a straight line is equal to four times the square on half the line.

Or, (i) Draw two tangents to a circle from an external point.

(ii) A quadrilateral is described touching a circle Prove that the sum of any pair of opposite sides is equal to the sum of the other pair.

3. Construct a triangle, given the base, one side, and the area.

1932

1. *Either*. (i) If one side of a triangle is produced prove that the exterior angle is greater than either of the interior opposite angles.

(ii) Show that it is impossible to draw three equal straight lines from a given point to a given straight line.

Or, (i) Prove that, if a straight line cuts two parallel straight lines, the corresponding angles are equal.

(ii) Prove that, if the three sides of one triangle are parallel to the three sides of another triangle, the corresponding angles are equal.

2. *Either*, (i) If a straight line drawn through the centre of a circle bisects a chord which does not pass through the centre, prove that it cuts the chord at right angles.

(ii) Show how to construct a circle of given radius to pass through two given points When is this construction impossible?

Or, (i) Prove that the tangent at any point of a circle and the radius through the point are perpendicular to one another.

(ii) Show how to draw a tangent to a given circle parallel to a given straight line. How many such tangents are possible?

3. (i) Construct a square on a given finite straight line. (Give only the traces of *all* your constructions, using a hard pencil, a straight ruler, and a pencil compass only.)

(ii) Divide the area of a given square into parts from which two equal squares can be made up.

1933

1. *Either*, Show that in a right-angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides.

(ii) Prove that in an equilateral triangle four times the square on the perpendicular drawn from a vertex on the opposite side is equal to three times the square on any side.

Or (i) Show that in an obtuse-angled triangle the square on the side subtending the obtuse angle is greater than the sum of the squares on the other two sides by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

(ii) Prove that a triangle whose sides are 2, 3 and 4 inches is an obtuse-angled triangle.

2 *Either* (i) Show that equal chords of a circle are equidistant from the centre.

(ii) Find the locus of the mid points of chords of constant length in a circle.

Or (i) Show that there is only one circle which passes through three given points not in a straight line.

(ii) Prove that two different circles cannot cut out each other at more than two points.

3 (i) Describe a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle. (Traces only are required.)

(ii) Construct a rhombus equal in area to a given rectangle and having a side equal to a side of the rectangle. (Traces only are required.)

1934

1 *Either*, (i) If two sides of a triangle are unequal show that the greater side has the greater angle opposite to it.

(ii) Show that the difference of any two sides of a triangle is less than the third side.

Or (i) Show that the triangles on equal bases and of the same altitude are equal in area.

(ii) Show that the straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side.

2. (i) Show that the angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference

(ii) L is any point on the arc PM of a circle. The angles LPM and LMP are bisected by straight lines which intersect at O. Find the locus of the point O

3. *Either.* (i) Draw a triangle equal in area to a given quadrilateral

(ii) Bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point

Or, (i) Construct a quadrilateral, given the lengths of the four sides and one angle. (Traces only are required.)

(ii) Bisect a triangle by a straight line drawn through a given point in one of its sides (Traces only are required.)

1935

1 *Either* (i) If the three sides of one triangle are respectively equal to the three sides of another, show that the two triangles are equal in all respects.

(ii) Show that the diagonals of a rhombus bisect one another at right angles.

Or, (i) Show that the equal chords of a circle are equidistant from the centre.

(ii) Through a given point within a circle draw the least possible chord.

2. *Either,* (i) In an obtuse-angled triangle show that the square on the side opposite the obtuse angle is greater than the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle by twice the rectangle contained by either of those sides and the projection of the other upon it

(ii) In any triangle show that the sum of the squares on two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median which bisects the third side.

) Show that if two chords of a circle cut one another (inside the circle) the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

(ii) ABC is a triangle right-angled at C ; from C a perpendicular CD is drawn to the hypotenuse , show that the square on CD is equal to the rectangle AD.DB.

3. (i) Describe a parallelogram that shall be equal to a given triangle and have one of its angles equal to a given angle.

(ii) Describe a rhombus equal to a given parallelogram and standing on the same base. When does the construction fail ?

1936

1. Show that the three angles of a triangle are together equal to two right angles.

(ii) Show that the angle contained by the bisectors of two adjacent angles of a quadrilateral is equal to half the sum of the remaining angles.

Or, (i) Show that triangles on the same base and between the same parallels are equal in area.

(ii) Show that the st. line which joins the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to each of the parallel sides.

2. (i) Show that the opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are together equal to two rt. angles.

(ii) If O is the orthocentre of the $\triangle$ABC, show that the angles BOC, BAC are supplementary.

Or, (i) Show that the angles made by a tangent to a circle with a chord drawn from the pt of contact are respectively equal to the angles in the alternate segment of the circle

(ii) Two circles intersect at A and B , and through P, any point on the circumference of one of them, st. lines PAC, PBD are drawn to cut the other circle at C and D. Show that CD is parallel to the tangent at P.

3. (i) Construct a triangle having given two sides and an angle opposite one of them. Explain the cases when you get two solutions.

(ii) Trisect a triangle by st. lines drawn from a given pt. on one of its sides. (Traces only are required.)

1937

1. *Either*, (i) If two triangles have two angles of one equal to two angles of the other, each, to each, and any side of the first equal to the corresponding side of the other, show that the triangles are equal in all respects

(ii) If the bisector of the vertical angle of a triangle also bisects the base, show that the triangle is isosceles.

Or, (i) Show that chords of a circle which are equidistant from the centre are equal.

(ii) PQ is a fixed chord in a circle, and AB is any diameter. Show that the sum of the perpendiculars let fall from A and B on PQ is constant if AC does not intersect PQ inside the circle

2. *Either*, (i) In every triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it. Establish.

(ii) Show that three times the sum of the squares on the sides of a triangle is equal to four times the sum of the squares on the medians.

Or, (i) If two chords of a circle cut at a point within it, the rectangles contained by the segments are equal. Establish.

(ii) A semi-circle is described on AB as diameter and any two chords AC, BD are drawn intersecting at P. Show that

$$AB^2 = AC.AP + BD.BP.$$

3. (i) Bisect a quadrilateral by a straight line drawn through an angular point. (State your construction, and give a theoretical proof)

(ii) Construct a triangle having the base angles equal to two given angles and the perpendicular from the vertex on the base equal to a given line. (Traces only are required.)

1938

1. *Either*, (i) If two straight lines have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, and the included angles equal, shew that the triangles are equal in all respects.

(ii) ABC, DBC are two isosceles triangles described on the same base BC but on opposite sides of it. AD meets BC at E. Prove that BE=EC.

Or,

(iii) Shew that the locus of a point which is equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.

(iv) Straight lines are drawn from a fixed point to a given straight line. Find the locus of their middle points.

2 *Either*, (i) Show that the angle at the centre of a circle is double of the angle at the circumference standing upon the same arc.

(ii) If two chords AB and CD of a circle intersect at a point E inside the circle shew that the angles subtended by AC and BD at the centre are together double of the angle AEC.

Or,

(iii) Prove that in an obtuse-angled triangle the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the side containing the obtuse angle, together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side on it.

(iv) If DE is drawn parallel to the base BC of an isosceles triangle ABC, prove that the difference of the squares on BE and CE is equal to the rectangle contained by BC and DE.

3. (i) Construct a triangle having given two angles and a side opposite to one of them. (State your constructions and give a theoretical proof).

(ii) Construct a triangle having given the perimeter and two angles. (Traces only are required).

[illegible]